

CAPÍTULO 3

Exponentes y variación exponencial

Matemáticas en la vida diaria

Se trata solamente de un rumor ¿Has notado la rapidez con la que se esparcen los rumores? Por ejemplo, las personas que tienen correo electrónico, a menudo reciben advertencias de sus amigos sobre virus de computadoras. No obstante, a veces las advertencias sólo son rumores diseminados por personas bien intencionadas. Supón que una persona envía a 10 amigos suyos un mensaje de advertencia sobre un virus. Una hora más tarde, cada amigo que recibió el mensaje, manda a su vez un mensaje de advertencia a otros diez amigos, y así sucesivamente. En 7 horas, 10,000,000 de personas con correo electrónico habrán recibido el mensaje. ¡Ésta es la razón por la cual algunas personas aseguran que el único virus son los mensajes de advertencia!

En este capítulo, aprenderás que la diseminación de rumores y otras situaciones se pueden modelar usando relaciones exponenciales.

Piensa al respecto ¿En cuántos hogares estadounidenses crees que haya correo electrónico? ¿Crees que después de 7 horas la mayoría de ellos ya habrán recibido el mensaje de advertencia sobre el virus?



Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

Vamos a iniciar el estudio de los exponentes y de los números demasiado grandes o demasiado pequeños. Los exponentes se pueden definir como una manera abreviada de expresar una multiplicación que se repite: $5 \times 5 \times 5$ equivale a 5^3 . En este ejemplo, el exponente es 3. En esta ocasión, vamos a estudiar exponentes y raíces con una mayor profundidad.

También vamos a analizar relaciones que crecen (o se reducen) exponencialmente. En este tipo de relaciones, la cantidad de cambio aumenta (o disminuye) cada vez más. El crecimiento demográfico y el interés compuesto son ejemplos de crecimiento exponencial. Si depositas \$100 en una cuenta de ahorros, con un interés del 7%, el saldo crecerá exponencialmente. Observa que aunque la tasa de interés no cambia, los intereses obtenidos aumentan cada año.

Año	Interés ganado	Saldo en la cuenta
1	\$7.00	\$107.00
2	\$7.49	\$114.49
3	\$8.01	\$122.50
4	\$8.58	\$131.08
5	\$9.18	\$140.26
6	\$9.81	\$150.07

También aprenderemos a diferenciar los números racionales de los irracionales, así como algunos métodos para trabajar con números irracionales. Los números racionales se definen como aquellos que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros. Los números irracionales son aquellos que al ser expresados en forma decimal, no son ni periódicos ni terminales, como por ejemplo $\sqrt{2}$ y π :

$$\sqrt{2} = 1.414213562. \dots$$

$$\pi = 3.141592654. \dots$$

Vocabulario Aprenderemos varios nuevos términos a lo largo de este capítulo:

factor de descomposición
números racionales
factor de crecimiento

números reales
números irracionales
notación científica

raíz enésima
raíz cuadrada
signo radical

¿Qué pueden hacer en el hogar?

Es probable que durante las siguientes semanas, su hijo(a) muestre interés en las relaciones exponenciales o en los números demasiado grandes o demasiado pequeños. Pueden ayudarlo(a) a identificar el tipo de situaciones en las que estas relaciones son comunes, como: el interés compuesto o la depreciación de un auto conforme pasan los años. Si encuentran noticias sobre números muy grandes o muy pequeños, pídanle a su hijo(a) que lo exprese usando notación estándar y notación científica; la deuda nacional es un buen ejemplo.

3.1

Repasa los exponentes

En tus estudios de matemáticas de los años anteriores, probablemente te encontraste con los exponentes. En esta lección, volverás a revisar los exponentes y cómo trabajar con expresiones que los incluyen.



Recuerda

Los puntos suspensivos “...” significan que la lista continúa con el mismo patrón.

Explora

Considera la lista de números.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

¿Cuáles pueden ser los siguientes dos números en esta lista?

¿Cómo describirías esta lista?

Elige cualquier número en la lista y duplícalo. ¿El resultado es otro número de la lista? ¿Sería esto cierto para *cualquier* número en la lista? ¿Por qué sí o por qué no?

Selecciona dos números en la lista y multiplícalos. ¿El producto es otro número en la lista? ¿Sería esto cierto para dos números *cualesquiera* en la lista? Explica tu respuesta.

Investigación 1 Exponentes enteros positivos

Todos los números en la lista de Explora son potencias de 2. Esto significa que puedes calcularlos todos multiplicando 2 por sí mismo cierto número de veces. Recuerda que puedes usar *exponentes* enteros positivos para mostrar que un número llamado *base* se multiplica por sí mismo.

exponente
2³
base

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$120^1 = 120$$

Serie de problemas A



Recuerda

Un *contraejemplo* es un ejemplo para el que una conjetura no es válida. Un contraejemplo prueba que una conjetura es incorrecta.

1. Revisa de nuevo la lista de Explora.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, . . .

- Usa un exponente para escribir 128 como una potencia de 2.
 - Escribe una expresión para el *enésimo* número en la lista.
 - ¿Está 6,002 en esta lista? ¿Cómo lo sabes?
 - ¿Está 16,384 en esta lista? ¿Cómo lo sabes?
2. Tamika inició otra lista de números usando potencias enteras positivas con 4 como base.
- ¿Cuáles son los 10 primeros números en la lista de Tamika?
 - ¿Está 2,048,296 en su lista? ¿Cómo lo sabes?
 - ¿Está el número 262,144 en su lista? ¿Está también en la lista del Problema 1? ¿Cómo lo sabes?
 - Los números 4,096 y 8,192 están en la lista en el Problema 1. ¿También están en la lista de Tamika?
 - ¡Pruébalo!** Tamika hizo la conjetura de que cada número en su lista también está en la lista del Problema 1. Explica por qué la conjetura es verdadera o da un contraejemplo.

Serie de problemas B

Menciona si cada enunciado es *a veces*, *siempre* o *nunca verdadero* para los valores enteros positivos de n . Si es a veces verdadero, establece para qué valores es verdadero.

- $2^n = 2,048$
- 3^n es menor que 1,000,000 (esto es, $3^n < 1,000,000$)
- $4^n = 2,048$
- 0.5^n está entre 0 y 1 (esto es, $0 < 0.5^n < 1$)

Lee este poema y contesta los Problemas 5 al 9, usando potencias para escribir tus respuestas.

*Fuerzo el lado del baúl;
Dentro, me esperan seis cajones.
Cada cajón tiene seis cajas amarillas
Hay seis zorras pintadas en cada cara.
Cada zorra tenía seis ojos verdes.
¿Zorras extraterrestres? ¡Qué sorpresa!*

- ¿Cuántos cajones había en el baúl?
- ¿Cuántas cajas había en el baúl?
- ¿Cuál era el número total de caras en las cajas del baúl?
- ¿Cuántas zorras había en el baúl?
- ¿Cuál era el número total de ojos de las zorras del baúl?





Recuerda

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

$$-2^2 = -(2^2) = -4$$

Sin calcular los valores de los números en cada par, indica qué número es el mayor. Explica tus respuestas.

10. 3^{18} ó 3^{20}

11. $(-2)^8$ ó $(-2)^{19}$

12. -3^{500} ó -3^{800}

13. Considera potencias de $\frac{1}{2}$.

a. Sin usar tu calculadora, calcula tres valores de enteros positivos de n para los que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es menor que $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

b. Describe todos los enteros positivos para los que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es menor que $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

c. ¿Cómo sabes que tu respuesta para la Parte b es correcta?

14. Sin calcular, indica qué número es mayor $\left(-\frac{1}{3}\right)^{34}$ ó $\left(-\frac{1}{3}\right)^{510}$.

Explica cómo sabes que tu respuesta es correcta.

VOCABULARIO

notación científica

Recuerda que la notación científica usa potencias de 10. Un número está escrito en **notación científica** cuando se expresa como un producto de una potencia de 10 y un número mayor que o igual a 1 pero menor que 10. Por ejemplo:

$$3,456 = 3.456 \times 10^3$$

$$10,000,000 = 1 \times 10^7$$

Serie de problemas C

1. Copia y completa la tabla sin usar tu calculadora.

Descripción	Número en forma estándar (aproximado)	Número en notación científica
Tiempo desde que los dinosaurios comenzaron a merodear en la Tierra (años)	225,000,000	
Proyección de la población mundial en 2010		6.8×10^9
Distancia de la Tierra a la galaxia Andrómeda (millas)		1.5×10^{19}
Masa del Sol (kg)	2,000,000,000,000,000,000,000,000,000	

Para cada par de números, indica cuál es mayor.

2. 2.34×10^5 ó 1.35×10^6

3. 3.83312×10^{31} ó 8.1×10^{32}



Comparte & resume

1. Explica lo que significa a^b , suponiendo que b es un entero positivo.
2. ¿Cómo decidirías si a^5 es mayor que o menor que a^7 ? Supón que a es positiva y no es igual a 1.

Investigación 2 Exponentes enteros negativos

En la Investigación 1, trabajaste con exponentes que eran enteros positivos. Recuerda de otros cursos de matemáticas que los exponentes también pueden ser enteros negativos.

Piensa & comenta

Considera esta lista de números.

$$\dots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots$$

Supón que la lista continúa en ambas direcciones.

¿Qué número le podría seguir a 27? ¿Qué número podría preceder a $\frac{1}{27}$?

Escribe 27, 9 y 3 usando exponentes enteros y la misma base.

Supón que el patrón en la forma exponencial, que acabas de escribir, continúa con los otros números en la lista anterior. Usa el patrón para escribir las formas exponenciales de 1 , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{27}$.

Piensa & comenta te puede haber recordado cómo usar 0 y los enteros negativos como exponentes.

Para cualquier número a que no sea igual a 0 y para cualquier entero b :

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$$

Por ejemplo,

$$2^0 = 1$$

$$8^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$$

$$0.25^0 = 1$$

$$(-5)^{-5} = \frac{1}{(-5)^5} = -\frac{1}{3,125}$$

Serie de problemas D

Para estos problemas no uses tu calculadora.

1. Escribe cada número sin usar un exponente.

a. 4^{-1}

b. -5^{-3}

c. 1.43536326^0

2. Considera estos números.

$$3^2 \quad 3^{-2} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \frac{1}{3^2} \quad \frac{1}{9} \quad 9$$

a. Ordena los números en dos grupos de manera que todos los números en cada grupo sean iguales unos a otros.

b. ¿A qué grupo pertenece $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$?

3. Escribe cada número sin usar un exponente.

a. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

b. 0.5^{-3}

4. Ordena estos números en dos grupos de manera que todos los números en cada grupo sean iguales unos a otros.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \quad \frac{3^2}{2^2} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{4}{9}$$

5. Ordena estos números en cuatro grupos de manera que todos los números en cada grupo sean iguales unos a otros.

$$10^3 \quad 10^{-3} \quad (-10)^{-3} \quad \frac{1}{(-10)^3} \quad \frac{1}{1,000} \quad -1,000 \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^3 \quad \left(-\frac{1}{10}\right)^{-3} \quad \frac{1}{10^3} \quad 1,000 \quad \left(-\frac{1}{10}\right)^3 \quad \frac{-1}{1,000} \quad (-10)^3$$

6. **Reto** Ordena estos números en dos grupos de manera que todos los números en cada grupo sean iguales unos a otros.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{-3} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^3 \quad \frac{b^3}{a^3} \quad b^3 \div a^3 \quad a^3 \div b^3$$

7. ¿Cuáles de éstos son equivalentes a a^{-n} ?

$$\frac{1}{a^n} \quad -a^n \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad 1 \div a^n$$

8. ¿Cuáles de éstos son equivalentes a $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$?

$$\frac{1}{a^{-n}} \quad a^n \quad -\left(\frac{1}{a}\right)^n \quad 1 \div a^n$$

9. ¿Cuáles de éstos son equivalentes a $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$?

$$\frac{a}{b^n} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \frac{a^{-n}}{b^{-n}} \quad \frac{b^n}{a^n}$$



Recuerda

Dividir entre un número es lo mismo que multiplicarlo por su recíproco.

Piensa & comenta

Cuando una fracción se eleva a una potencia entera negativa, ¿cómo puedes encontrar una fracción equivalente usando una potencia entera positiva? Por ejemplo, ¿cómo hallas la fracción equivalente a $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$?

Serie de problemas E

Menciona si cada enunciado es *a veces*, *siempre* o *nunca verdadero* para los valores enteros (positivo, negativo ó 0) de n . Si es verdadero, a veces, indica para qué valores es verdadero.

1. $2^n = \frac{1}{2,048}$

2. 3^n es menor que 1 (es decir, $3^n < 1$)

3. 5^n está entre 0 y 1 ó es igual a 0 ó 1 (es decir, $0 \leq 5^n \leq 1$)

Sin calcular los valores de los números en cada par, indica qué número es mayor. Explica cómo sabes que tu respuesta es correcta.

4. 7^{-89} ó 7^{-90}

5. 3^{-15} ó 6^{-15}

6. 0.4^{-5} ó 0.4^{-78}

7. -9^{-4} ó -0.5^{-4}

8. $(-2)^{-280}$ ó $(-2)^{-282}$

9. $(-50)^{-45}$ ó $(-50)^{-51}$

10. 0.3^{-50} ó 1.3^{-50}

Como sabes, puedes usar la notación científica con potencias enteras positivas de 10 para expresar números muy grandes. De la misma forma, puedes usar potencias enteras negativas de 10 para expresar números muy pequeños. Por ejemplo:

$$0.003456 = 3.456 \times 10^{-3}$$

$$0.0000001 = 1 \times 10^{-7}$$

El protozoo *Trypanosoma*, la causa de la enfermedad del sueño de África Oriental, ha invadido estos glóbulos rojos. Los glóbulos rojos miden aproximadamente 5×10^{-3} cm. ¿Puedes estimar la longitud del *Trypanosoma*?



Serie de problemas

1. Completa la siguiente tabla sin usar tu calculadora.

[illegible]

Para cada par de números, indica cuál es mayor.

2. 2.34×10^{-5} ó 1.35×10^{-6}

3. 3.83312×10^{-31} u 8.1×10^{-32}

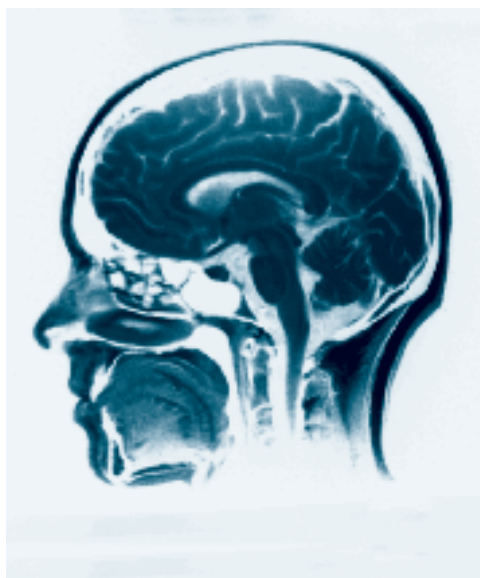


Una célula de Purkinje es un tipo de célula cerebral llamada neurona. El cerebro humano contiene aproximadamente 30 millones de éstas.

Comparte & resume

1. Explica lo que significa a^{-b} suponiendo que b es un entero positivo.

2. ¿Cómo decidirías si a^{-5} es mayor o menor que a^{-7} ? Supón que a es positivo y no es igual a 1.



Investigación 3 Leyes de exponentes

Recuerda de clases de matemáticas anteriores las siguientes *leyes de exponentes*, que pueden hacer más simples los cálculos con exponentes. En estas leyes, las bases a y b no pueden ser 0 si se encuentran en un denominador o si se elevan a un exponente negativo o a 0.

Ley de productos

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^c \cdot b^c = (ab)^c$$

Ley de cocientes

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

Ley de potencia de una potencia

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

EJEMPLO

Ben explica cómo recuerda la primera ley de productos.

Para $a^b \cdot a^c$, pienso en a^b como el número a multiplicado por sí mismo b veces.

$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{b \text{ aes}}$

$a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{c \text{ aes}}$

Y a^c como a multiplicado por sí mismo c veces.

Esto significa que a^b por a^c es igual al producto de toda la cadena de a . Cuéntalas: b en el primer grupo y c en el segundo.

$a^b \cdot a^c = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{b \text{ aes}} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{c \text{ aes}}$

De modo que el número total de la multiplicación de a es $b + c$ y el producto se puede escribir como a^{b+c} .

$\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{b \text{ aes}} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{c \text{ aes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{b+c \text{ aes}} = a^{b+c}$

En la siguiente serie de problemas, pensarás en formas de explicar por qué algunas de las otras leyes de exponentes son verdaderas. Aunque estas leyes son verdaderas para todos los valores enteros de los exponentes, te concentrarás en enteros positivos o negativos para facilitar tu trabajo. Usa el razonamiento de Ben como una guía.

Serie de problemas

1. **¡Pruébalo!** En este problema, demostrarás por qué la primera ley de cocientes $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$, funciona para exponentes enteros y positivos. Supón que $a \neq 0$.
 - a. Primero demuestra que la ley funciona cuando $b > c$.
 - b. Ahora demuestra que la ley funciona cuando $b < c$.
2. **¡Pruébalo!** Demuestra que la segunda ley de productos, $a^c \cdot b^c = (ab)^c$, funciona para exponentes enteros negativos. Ayuda: Sea $c = -x$ para un entero positivo x .

Serie de problemas

1. Copia esta tabla de multiplicación. Sin usar tu calculadora, calcula las expresiones faltantes. Escribe todas las respuestas como potencias.

$\times$	3^{-2}	3^x	3^4
3^4			
3^a			
-3^2			

2. Copia esta tabla de divisiones. Sin usar tu calculadora, calcula las expresiones faltantes dividiendo la primera expresión, en ese renglón, por la expresión, en esa columna. Por ejemplo, la primera celda sin sombreado representa el cociente $2a^4 \div a^5$, ó $\frac{2a^4}{a^5}$, lo cual es equivalente a $2a^{-1}$. Escribe todas las respuestas como potencias o potencias de productos.

$\div$	a^5	a^{-2}	$(a^3)^2$
$2a^4$			
a^{-3}			
$(2a)^5$			

3. Copia esta tabla. Sin usar tu calculadora, completa las expresiones faltantes. Escribe todas las respuestas como potencias o potencias de productos.

$\times$		$2a$		
b^{-4}	b^4			
a^8			$a^{10}b^{-4}$	a^8b^{-8}
			b	
		$(2ab)^4$		

Serie de problemas

Para estos problemas, no uses tu calculadora.

1. Vuelve a plantear cada expresión con una sola base.

a. $(a^{-m})^0$ (Supón $a \neq 0$.)

b. $[(-d)^3]^4$

c. **Reto** $(-10^{-4})^{-5}$

2. Vuelve a plantear cada expresión con una sola base.

a. $(2^3 \cdot 2)^2$

b. $(a^m)^n \div (a^{-m})^n$

c. $4^3 \cdot n^3 \div (-16n)^3$

3. Encuentra por lo menos dos formas de escribir cada expresión como un producto de dos expresiones.

a. $32n^{10}$

b. m^7b^{-7}

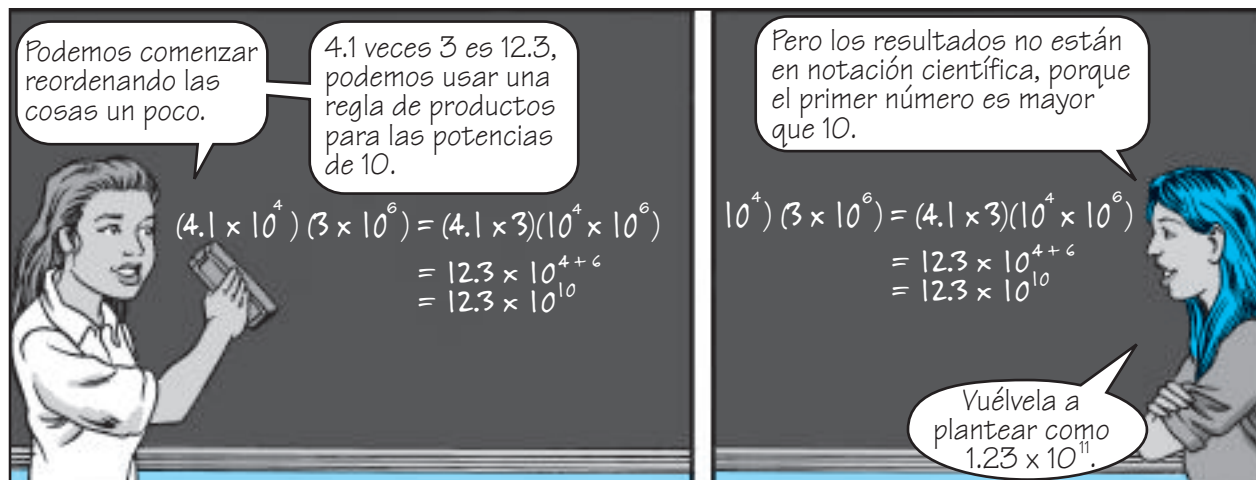
Comparte & resume

Sin usar una calculadora, vuelve a plantear esta expresión en forma tan reducida como puedas. Muestra cada paso de tu trabajo y registra cada ley de exponentes, que uses para cada paso.

$$\frac{2^6n^3}{(16n^2)^3}$$

Investigación 4 Leyes de exponentes y notación científica

Lucita y Tala comentaban cómo multiplicar 4.1×10^4 por 3×10^6 .



Piensa & comenta

¿Cómo dividirías dos números escritos en notación científica? Por ejemplo, ¿qué es $(2.12 \times 10^{14}) \div (5.3 \times 10^6)$? Escribe tu resultado en notación científica.

Serie de problemas J

Para estos problemas no uses tu calculadora a menos que se te indique lo contrario.



Estimaciones del número de estrellas y el número de galaxias se revisan conforme los astrónomos recopilan más datos sobre el universo.

1. Hay aproximadamente 4×10^{11} estrellas en nuestra galaxia y aproximadamente 10^{11} galaxias en el universo visible.
 - a. Si cada galaxia tiene tantas estrellas como la nuestra, ¿cuántas estrellas hay en el universo visible? Demuestra cómo determinaste tu respuesta.
 - b. Si sólo 1 en cada 1,000 estrellas del universo visible tiene un sistema planetario, ¿cuántos sistemas planetarios hay? Demuestra cómo determinaste tu respuesta.



Recuerda

1 billón es
1,000,000,000.

Hay 88 constelaciones, o grupos de estrellas, que forman patrones fácilmente identificables conocidas actualmente. Ésta es la constelación Orión, "el Cazador".



- c. Si 1 de cada 1,000 de esos sistemas planetarios tiene por lo menos un planeta con condiciones adecuadas para la vida tal como la conocemos, ¿cuántos sistemas como tal habría? Demuestra cómo determinaste tu respuesta.
 - d. Al final del siglo XX, la población de la Tierra se estimaba en 6 billones de personas. Compara este número con tu respuesta de la Parte c. ¿Qué significa tu respuesta en términos de esta situación?
2. *Escherichia coli* es un tipo de bacteria que a veces se encuentra en las piscinas. Cada bacteria *E. coli* tiene una masa de 2×10^{-12} gramos. El número de bacterias aumenta de manera que, después de 30 horas, una bacteria ha sido reemplazada por una población de 4.8×10^8 bacterias.
 - a. Supón que una piscina comienza con una población de una sola bacteria. ¿Cuál será la masa de la población después de 30 horas?
 - b. Un clip pequeño tiene una masa de aproximadamente 1 gramo. ¿Cuántas veces más grande que la masa 4.8×10^8 de las bacterias *E. coli* es la masa del clip? Demuestra cómo determinaste tu respuesta.
 3. La velocidad de la luz es aproximadamente 2×10^5 millas por segundo.
 - a. En promedio, la luz tarda 500 segundos en viajar del Sol a la Tierra. ¿Cuál es la distancia promedio del Sol a la Tierra? Escribe tu respuesta en notación científica.
 - b. La estrella Alfa Centauri está aproximadamente a 2.5×10^{13} millas de la Tierra. ¿Cuántos segundos tarda la luz en viajar entre Alfa Centauri y la Tierra?
 - c. Usa la respuesta de la Parte b para estimar cuántos años tarda la luz en viajar entre Alfa Centauri y la Tierra. Puedes usar tu calculadora.
 4. Estos datos muestran los estimados actuales de la energía liberada por los tres terremotos más grandes registrados en la Tierra. El *joule* es una unidad para medir energía, bautizada en honor del físico británico James Prescott Joule.

Terremotos más grandes registrados

Ubicación	Fecha	Energía liberada (joules)
Tambora, Indonesia	Abril de 1815	8×10^{19}
Santorini, Grecia	aproximadamente 1470 A.C.	3×10^{19}
Krakatoa, Indonesia	Agosto de 1883	6×10^{18}

- a. ¿Cuántas veces más potente que el terremoto de Krakatoa fue el terremoto de Santorini?
- b. ¿Cuántas veces más potente que el terremoto de Krakatoa fue el terremoto de Tambora?

Modela nuestro sistema solar

MATERIALES

- cinta adhesiva de papel
- regla

En esta investigación, examinarás las distancias relativas entre los cuerpos en nuestro sistema solar.

Haz una predicción

Las distancias promedio de los planetas desde el Sol, a menudo se escriben en notación científica.



Cada 248 años, las órbitas de Plutón y Neptuno se cruzan y Plutón se vuelve el octavo planeta en lugar del noveno a partir del Sol.

Planeta	Distancia promedio al Sol (millas)
Mercurio	3.6×10^7
Venus	6.7×10^7
Tierra	9.3×10^7
Marte	1.4×10^8
Júpiter	4.8×10^8
Saturno	8.9×10^8
Urano	1.8×10^9
Neptuno	2.8×10^9
Plutón	3.7×10^9

Imagínate alinear los planetas con el Sol en un extremo y Plutón en el otro, de manera que cada planeta esté a su distancia promedio al Sol. ¿Cómo estarían espaciados los planetas? Aquí está la predicción de un estudiante:

Sol

Mercurio Venus Tierra Marte Júpiter Saturno Urano Neptuno Plutón

1. Ahora haz tu propia predicción. Sin usar tu calculadora, dibuja una versión a escala de los planetas alineados en línea recta a partir del Sol. No te preocupes por el tamaño de los planetas.

Crea un modelo

Para verificar tu predicción, algunos de los miembros de tu clase representarán partes del sistema solar en un modelo a gran escala. El modelo a escala te permitirá comparar las distancias promedio al Sol, aunque no modelará los tamaños relativos de los planetas.



The Nine Planets es uno de muchos sitios Web que contienen información sobre nuestro sistema solar. Este sitio usa una convención común para la notación científica en la que los símbolos “ $\times 10$ ” se reemplazan con la letra “e”; el exponente le sigue como un número de tamaño completo. Usando esta convención, 3.6×10^7 se escribe 3.6 e7.

En un espacio grande, usa cinta adhesiva de papel para marcar una línea a lo largo de la cual harás un modelo. El Sol estará en un extremo de la línea, Plutón estará en el otro.

Con tu clase, contesta las tres preguntas siguientes para determinar las posiciones de los planetas en tu modelo.

2. Mide la longitud de la línea. Ésta será la distancia entre el Sol y Plutón en tu modelo.
3. ¿Cuál es la distancia real en millas entre el Sol y Plutón?
4. ¿Por qué número multiplicarás las distancias (en pies) en tu modelo para calcular la distancia real (en millas)?
5. ¿Cómo puedes calcular las distancias de los planetas al Sol en tu modelo?
6. Usa tu respuesta a la Pregunta 5 para estimar la distancia entre cada planeta y el Sol en tu modelo de escala. Copia la tabla, escribe la unidad apropiada en la última columna, después registra las distancias a escala.

Planeta	Distancia promedio al Sol (millas)	Distancia promedio al Sol en el modelo a escala (____)
Mercurio	3.6×10^7	
Venus	6.7×10^7	
Tierra	9.3×10^7	
Marte	1.4×10^8	
Júpiter	4.8×10^8	
Saturno	8.9×10^8	
Urano	1.8×10^9	
Neptuno	2.8×10^9	
Plutón	3.7×10^9	

Tu maestro le asignará a tu grupo un planeta o el Sol. Tu grupo debe hacer un letrero con el nombre del planeta (o el Sol) y su distancia promedio al Sol, en millas, en notación científica.

Decide con tu clase en qué extremo de la recta estará el Sol y determina a dónde pertenece tu cuerpo celeste en el modelo a escala. Elige un miembro de tu grupo que se pare sobre la recta con el letrero y represente el cuerpo celeste.

Verifica tu predicción

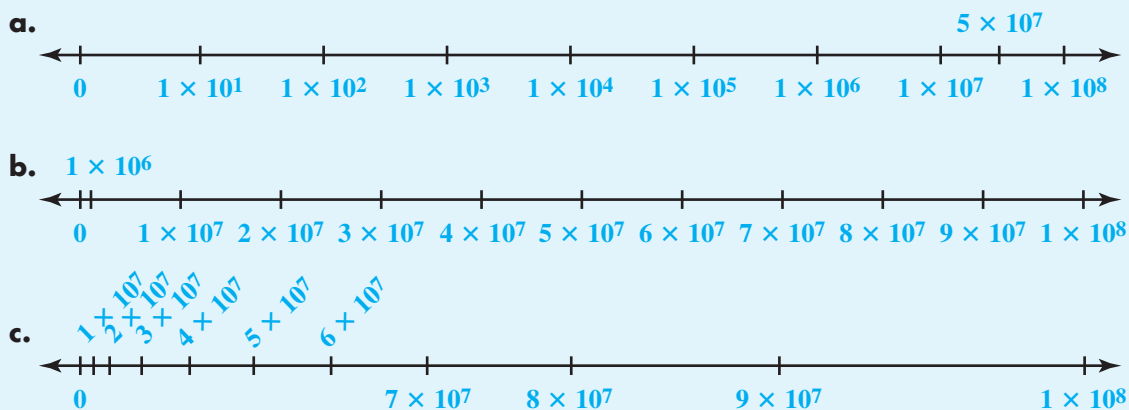
Contesta estas preguntas con tu clase.

7. ¿Cuál par de planetas está más cerca? ¿Cuál es la distancia real entre ellos?
8. ¿Cuántos planetas adyacentes están más separados? (*Adyacente* significa al lado del otro.) ¿Cuál es la distancia real entre ellos?
9. Compara las dos distancias en las Preguntas 7 y 8. ¿Cuántas veces más separados están los planetas de la Pregunta 8 que los planetas de la Pregunta 7?
10. ¿Tu diagrama da una ilustración razonablemente exacta de las distancias?
11. ¿Hubo algo sobre el espacio entre los planetas que te haya sorprendido? Si es así, ¿qué fue?
12. ¿Hubo algo acerca del espaciamiento de los planetas que *no* te sorprendió? Si es así, ¿qué fue?
13. La Luna está a un promedio de 2.4×10^5 millas de la Tierra.
 - a. Sin calcular, estima dónde estaría la Luna en tu modelo y pídele a tu profesor que se pare ahí.
 - b. Ahora calcula la distancia exacta a escala de la Luna a la Tierra en tu modelo.
 - c. ¿Fue correcta tu estimación sobre la posición de la Luna? De no ser así, ¿qué fue diferente?



¿Que aprendiste?

14. Dibuja una revisión a escala de los planetas que muestre la distancia relativa entre los mismos. No te preocupes de la representación del tamaño de los planetas, pero haz tu mejor intento para obtener la distancia correcta entre ellos.
15. Abajo hay tres rectas numéricas marcadas con números en notación científica. ¿Qué recta numérica tiene los números en los lugares correctos?



Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. **Estudios sociales** Uno de estos números está en notación estándar y uno en notación científica. Uno es la población mundial en 1750, el otro es la población mundial en 1950.

$$2.56 \times 10^9$$

$$725,000,000$$

¿Cuál crees que es la población mundial en 1750? ¿En 1950? Explica tu razonamiento.

2. ¿Para qué valores de n , si los hay, será n^2 igual o menor que 0?

3. ¿Para qué valores de n , si los hay, será n^3 igual o menor que 0?

Dado que n representa un entero positivo, decide si cada enunciado es *a veces*, *siempre* o *nunca verdadero*. Si es a veces verdadero, menciona para qué valores los es.

4. $4^n = 65,536$

5. 4^n es menor que 1,000,000 (es decir, $4^n < 1,000,000$)

6. n^2 es negativo (es decir, $n^2 < 0$)

7. 0.9^n es mayor que 0 igual a 0, y al mismo tiempo 0.9^n es menor que o igual a 1 (es decir, $0 \leq 0.9^n \leq 1$)

8. ¿Para qué valores positivos de x será x^{20} mayor que x^{18} ?

9. ¿Para qué valores positivos de x será x^{18} mayor que x^{20} ?

10. ¿Para qué valores positivos de x será x^{18} igual a x^{20} ?

11. ¿Para qué valores negativos de x será x^{20} mayor que x^{18} ?

12. ¿Para qué valores negativos de x será x^{18} mayor que x^{20} ?

13. ¿Para qué valores negativos de x será x^{18} igual a x^{20} ?



¡Si cada uno de los 9×10^6 residentes estimados de la ciudad de Nueva York produce 4 libras de basura por día, esto equivale a 1.3×10^{10} libras de basura cada año!

- 14. Reto** En la Investigación 1, exploraste las potencias enteras positivas de 2 y 4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512
4^n	4	16	64	256	1,024	4,096	16,384	65,536	262,144

Ahora piensa en las potencias de enteros positivos de 8.

- Enumera las primeras cinco potencias positivas de 8.
 - Menciona tres números que estén en las tres listas, es decir, tres números que sean potencias de 2, 4 y 8.
 - Enumera tres números mayores que 16 que son potencias de 2, pero que no son potencias de 8.
 - Enumera tres números mayores que 16 que sean potencias de 4, pero que no son potencias de 8.
 - Describe las potencias de 2 que también son potencias de 8.
 - Describe las potencias de 4 que también son potencias de 8.
- 15.** ¿Para qué valores positivos de x , x^{-20} será mayor que x^{-18} ?
- 16.** ¿Para qué valores positivos de x , x^{-18} será mayor que x^{-20} ?
- 17.** ¿Para qué valores (positivos o negativos) de x , será x^{-18} igual a x^{-20} ?
- 18.** La sexta potencia de 2 es 64; es decir, $2^6 = 64$.
- Escribe al menos cinco expresiones diferentes, usando una sola base y un solo exponente que sean equivalentes a 64.
 - Escribe el número 64 en notación científica.

Ordena cada grupo de expresiones de manera que las expresiones en cada grupo sean iguales entre sí. No uses tu calculadora.

19. m^2 $\left(\frac{1}{m}\right)^2$ m^{-2} $\left(\frac{1}{m}\right)^{-2}$ $\frac{1}{m^2}$ $1 \div m^2$

20. 3^x $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ $\frac{1}{3^x}$ 3^{-x} $1 \div 3^x$

- 21. ¡Pruébalo!** Demuestra que la segunda ley de cocientes $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$, funciona para los exponentes enteros positivos de c . Supón que b no es igual a 0.

- 22. Reto** Demuestra que la potencia de una ley de potencias, $(a^b)^c = a^{bc}$, funciona para exponentes enteros positivos de b y c .



Vuelve a plantear cada expresión con una sola base y un solo exponente.

23. $2^7 \cdot 2^{-4} \cdot 2^x$

24. $(-4^m)^6$

25. $m^7 \cdot 28^7$

26. $(-3)^{81} \cdot (-3)^{141}$

27. $\frac{55^{-8}}{9^{-8}}$

28. $\left(\frac{m^{84}}{m^{12}}\right)^x$

29. $3^{-5} \cdot 8^5$

30. $n^a \div n^{\frac{a}{3}}$

31. $(22^2 \cdot 22^5)^0$

Vuelve a plantear cada expresión de la manera más reducida que puedas.

32. $4a^4 \cdot 3a^3$

33. $m^{-3} \cdot m^4 \cdot b^7$

34. $\frac{10n^{-15}}{5n^5}$

35. $(4x^{-2})^6$

36. $(-m^2n^3)^4$

37. $(a^m)^n \cdot (b^3)^2$

38. $(x^{-2})^3 \cdot x^5$

39. $\frac{12b^5}{4b^{-2}}$

40. $\frac{(x^4y^{-5})^{-3}}{(xy)^2}$

Copia cada tabla. Sin usar tu calculadora encuentra las expresiones faltantes. Escribe todas las respuestas como potencias o productos de potencias. Para la tabla de división, divide el rótulo de cada fila entre el rótulo de cada columna.

41.

$\times$	2^{10}	2^{-x}	-2^x	
-2^{-3}				
		2^{a-x}		$(2n)^a$
2^{2a}				

42.

$\div$	4^{-2}	4^x	-4^x	n^7
-4^7				
4^a				
4^7				



Sirio es una estrella doble con una estrella más pequeña llamada Sirio B, o el Cachorro que gira en órbitas a su alrededor.

43. **Ciencia física** La velocidad de la luz es aproximadamente 2×10^5 millas por segundo. Aproximadamente a 5×10^{13} millas de la Tierra, Sirio aparenta ser la estrella más brillante. ¿Cuántos segundos demora la luz en viajar entre Sirio y la Tierra? ¿Cuántos años demora?

44. **Estudios sociales** Se ha estimado que la población del mundo en el año 1 A.D. era de aproximadamente 200,000,000. Para 1850, este número había crecido aproximadamente a 1 billón y para 2000, la población era cerca de 6×10^9 .

- ¿Cuántas veces era la población de 1850 la población de 1 A.D.?
- ¿Cuántas veces era la población de 2000 la población de 1850?
- ¿En qué periodo de tiempo creció más la población: en los 1,850 años desde 1 A.D. a 1850 ó en los 150 años de 1850 al 2000?

- 45.** Copia la tabla de división. Sin usar tu calculadora, determina las expresiones que faltan dividiendo el rótulo de la fila entre el rótulo de la columna. Expresa todas las respuestas en notación científica.

$\div$			3×10^x
3×10^{-20}	6×10^{-29}		
6×10^{14}		3×10^{134}	
			$5 \times 10^{a-x-1}$

Conecta & amplía

- 46. Estudios sociales** Según el censo de 1790, la población de Estados Unidos en 1790 era de 3,929,214. Puedes aproximar este valor con potencias de varios números, por ejemplo, 2^{21} es 2,097,152 y 2^{22} es 4,194,304. Usando potencias de 2, el número 2^{22} es el más cercano a 3,929,214.

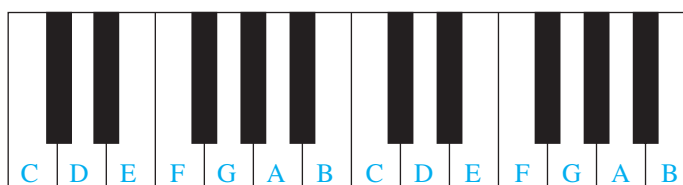
¿Cuál es la aproximación más cercana con potencias de 3? ¿Con potencias de 4? ¿Con potencias de 5?

- 47.** ¿Qué grupos de números comparten números con las potencias de 2? Explica cómo lo sabes.

- a. potencias enteras positivas de 6
- b. potencias enteras positivas de 7
- c. potencias enteras positivas de 16

- 48. Bellas artes** Un piano tiene ocho teclas C. La *frecuencia* de una nota determina si su sonido es alto o bajo. Al moverse de izquierda a derecha del teclado, cada nota C tiene el doble de frecuencia que la que la precede. Por ejemplo, la “C media” tiene una frecuencia aproximada de 261.63 vibraciones por segundo. La siguiente C tiene una frecuencia aproximada de 523.25 vibraciones por segundo.

Si la primera tecla C tiene una frecuencia de x , ¿cuál es la frecuencia de la última tecla C?



En tus propias palabras

Escribe una carta a un estudiante que está confundido con los exponentes. Explícale cómo multiplicar dos números cuando cada uno esté escrito como la base de un exponente. Asegúrate de abordar estos casos:

- Los números tienen el mismo exponente.
- Los números tienen la misma base.
- Los números tienen bases y exponentes diferentes.

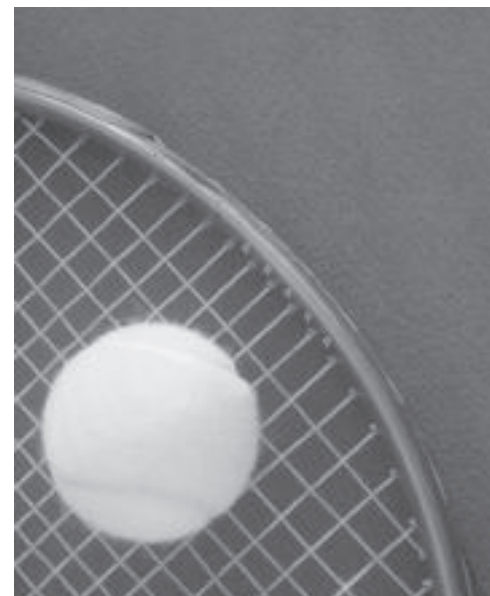
- 49. Economía** La madre de Julián le ofreció \$50 al mes como mesada. Julián dijo que prefería que su madre le pagara 1 moneda de centavo el primer día del mes, 2 monedas de centavo el segundo día, 4 el tercer día, 8 el cuarto, y así sucesivamente. Su madre simplemente duplicaría el número de monedas de 1 centavo que le dio cada día hasta el final del mes. Ella le dijo que le parecía bien.
- ¿Julián recibirá más dinero con una mesada de \$50 por mes o con su plan? Explica por qué.
 - Si el plan de Julián le produce más dinero, ¿en qué día recibiría más de \$50?
 - Con su plan, ¿cuánto dinero recibiría Julián el último día de Junio, el cual tiene 30 días?
 - Reto** Con su plan, ¿cuánto recibiría Julián en total en el mes de junio? El completar una tabla como la siguiente te puede ayudar a contestar esta pregunta.

Día	Cantidad recibida cada día	Cantidad total de dinero
1	\$0.01	\$0.01
2	\$0.02	$\$0.01 + 0.02 = \0.03
3	\$0.04	$\$0.03 + 0.04 = \0.07
4		

- 50. Deportes** Un torneo particular de tenis comienza con 64 jugadores. Si un jugador pierde un sólo encuentro, él o ella son retirados del torneo. Después de una ronda, sólo quedan 32 jugadores, después de dos rondas, sólo quedan 16, y así sucesivamente.

Seis estudiantes deducen una fórmula para describir el número de jugadores p , que quedan después de r rondas. ¿Qué regla o reglas son correctas? Para cada regla que creas que esté correcta, demuestra cómo lo sabes.

- Terrill: $p = \frac{64}{2^r}$
- Mi-Yung: $p = 64 \cdot 2^{-r}$
- Antonia: $p = 64 \cdot \frac{1}{2^r}$
- Peter: $p = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r$
- Damon: $p = 64 \cdot 0.5^r$
- Tamika: $p = 64 \cdot (-2)^r$



51. Esta lista de números continúa con el mismo patrón en ambas direcciones.

$$\dots, \frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125, 625, \dots$$

Héctor quería escribir una expresión para esta lista con n como una variable. Para hacer esto, él tuvo que escoger un número de la lista para ser el punto de “inicio”. Él decidió que cuando $n = 1$, el número en la lista es 5. Cuando $n = 2$, el número es 25.

- Usa el plan de Héctor para escribir una expresión que te dará cualquier número en la lista.
- ¿Qué valor de n te da 625? ¿1? ¿ $\frac{1}{5}$?

Sin calcular el valor de cada par de números, determina qué número es mayor, para cada problema explica por qué.

52. 2^{80} ó 4^{42}

53. $3^{-1,600}$ ó 27^{-500}

54. 12^{20} ó 4^{45}

55. Una tienda de repostería vende un bizcocho cuadrado que tiene 45 cm de ancho y de 10 cm de espesor. Un competidor ofrece un bizcocho cuadrado con el mismo espesor que es 2 cm más ancho. El primer panadero argumenta que el área de la parte superior del bizcocho rival es $(45 + 2)^2 \text{ cm}^2$ y por lo tanto sólo 4 cm^2 más grande que el que él vende.

¿Cómo crees que el panadero hizo mal uso de las reglas para calcular con exponentes? ¿Cuál es la diferencia real entre las áreas?

56. **Astronomía** La Tierra viaja cada año aproximadamente 6×10^8 millas alrededor del Sol. ¿Aproximadamente a qué velocidad en millas por segundo debe de viajar la Tierra? Da la respuesta en notación científica.
57. **Ciencia biológica** El diámetro del cuerpo de una célula Purkinje es $8 \times 10^{-5} \text{ m}$.

- Si un microscopio aumenta en 1,000 veces, ¿cuál será el diámetro a escala, en metros, como se ve en el microscopio?
- ¿Cuál es el diámetro a escala, en centímetros, como se ve en el microscopio?

Repaso mixto

Menciona si los datos en cada tabla pueden ser lineales e indica cómo lo sabes.

58.

a	-4	-3	-2	-1	0	1
b	-32	-13.5	-4	-0.5	0	0.5

59.

c	-4	-3	-2	-1	0	1
d	-12.1	-9.6	-7.1	-4.6	-2.1	0.4



Cada tabla representa una relación lineal. Escribe una ecuación para representar cada relación.

60.

<i>a</i>	-4	-3	-2	-1	0	1
<i>b</i>	-8.8	-6.6	-4.4	-2.2	0	2.2

61.

<i>e</i>	-4	-3	-2	-1	0	1
<i>f</i>	-15	-13.75	-12.5	-11.25	-10	-8.75

Vuelve a plantear cada ecuación en la forma $y = mx + b$ e indica si la relación representada por la ecuación aumenta o disminuye.

62. $4(x - y) = -3$

63. $\frac{4 - 3x}{2y} = 1$

64. $-\frac{1}{3}x = -4 - \frac{2}{3}y$

65. $\frac{2}{y} = \frac{1}{3 + 2x}$

- 66. Economía** Julia encontró tres sitios Web que venden calcomanías cuadradas de 4 pulgadas con el logotipo de su banda favorita. Los tres sitios venden las calcomanías a precios diferentes, y cobran cantidades diferentes por el flete.

Sitio 1: Las calcomanías son a 75¢ cada una, el flete es \$4 para las órdenes de cualquier tamaño.

Sitio 2: Las calcomanías son a 60¢ cada uno, el flete es \$5.50 para las órdenes de cualquier tamaño.

Sitio 3: Las calcomanías son a \$1.25, incluyendo el flete.

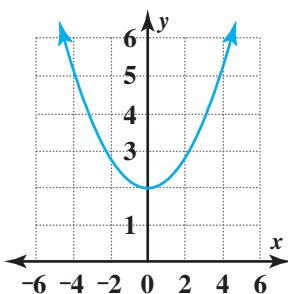
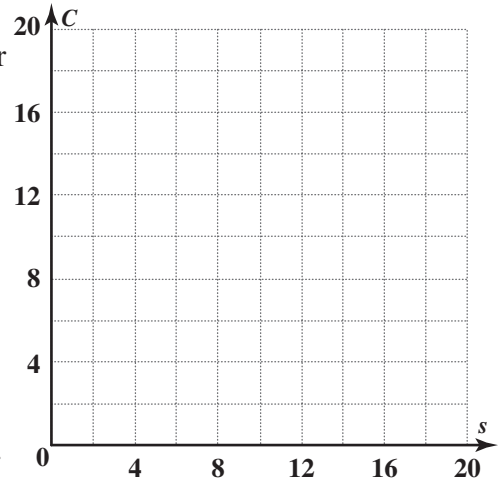
- a.** Para cada sitio escribe una ecuación que represente el cobro C por ordenar cualquier número de calcomanías, s .

- b.** Grafica tus tres ecuaciones en unos ejes como estos. Rotula cada gráfica con su número de sitio.

- c.** Usa tu gráfica para contestar esta pregunta: Si Julia quiere ordenar 16 calcomanías, ¿cuál sitio le cobrará menos?

- d.** Usa tu gráfica para contestar esta pregunta: Si Julia quiere ordenar 10 calcomanías, ¿cuál sitio le cobrará menos?

Costo de las calcomanías



- 67.** Considera la parábola de la izquierda.

- a.** ¿Cuál es su vértice?
b. ¿Cuál es su eje de simetría?

3.2

Relaciones exponenciales

Probablemente has escuchado comentar que algo que cambia rápidamente “crece exponencialmente”. En el lenguaje común, el *cambio exponencial* a menudo se usa para decir *cambio rápido*. En las matemáticas, tiene un significado más preciso. En esta lección, observarás varias clases de relaciones exponenciales y revisarás el significado preciso de *cambio exponencial*.

Explora

La escuela secundaria Lewis y Clark está llevando a cabo la colecta anual de alimentos enlatados, patrocinada por los maestros de matemáticas. Los maestros establecieron un sistema de puntos para recompensar a los estudiantes que traen latas de alimento. Cada estudiante puede elegir entre dos planes para recibir los puntos.

Colecta de alimentos enlatados			
¡GANA puntos valiosos con base en el número de latas donadas!			
Latas totales	Puntos totales		
	Plan A	Plan B	
1	1,000	2	
2	2,000	4	
3	3,000	8	
4	4,000	16	

Describe la forma en la que los puntos de cada plan cambian, al aumentar el número de latas recaudadas.

¿Qué plan escogerías? ¿Es éste siempre el mejor plan, sea cual sea el número de latas que traigas?

El Plan A representa un tipo de crecimiento que es muy familiar para ti, el crecimiento lineal. Con cada lata adicional se agregan 1,000 puntos al total. La tasa de crecimiento es constante.

Para el Plan B, el número de puntos se multiplica por 2 por cada lata adicional. Las cantidades que se multiplican periódicamente por un número mayor que 1 se dice que *crecen exponencialmente*. También puedes decir que muestran *crecimiento exponencial*. El número por el que se multiplican se llama **factor de crecimiento**. El factor de crecimiento para el Plan B es 2.

VOCABULARIO
factor de
crecimiento

Investigación 1 Crecimiento exponencial

El reino de Tonga es un grupo de más de 150 islas en el océano Pacífico. En 1994, se estimaba que la población de Tonga era de 100,000 personas. Supón que la población ha aumentado 2% cada año desde 1994.



Sólo 40 de las islas que forman el reino de Tonga están habitadas.

Piensa & comenta

Haz una tabla que muestre la población estimada de Tonga para los 5 años posteriores a 1994.

Supón que la población continúa creciendo un 2% por año. ¿Cómo puedes predecir la población 25 años después de 1994?

Años después de 1994	Población estimada
0	100,000
1	
2	
3	
4	
5	

Aquí está cómo Kai y Lydia pensaron calcular la población de Tonga después de 25 años.

Calcula el 2% de población en 1994 y suma el resultado a la población de 1994.

$$2\% \text{ de } 100,000 = 0.02 \cdot 100,000 = 2,000$$
$$100,000 + 2,000 = 102,000$$

Podemos hacer los mismos cálculos para cada año.

Podemos calcular un poco más rápido la población de cada año si reescribimos tus pasos iniciales.

Población en 1995 = $100,000 + 2\% \text{ de } 100,000$
 $= 100,000 + 0.02 \cdot 100,000$
 $= 100,000 (1 + 0.02)$
 $= 100,000 (1.02)$
 $= 102,000$

De modo que podemos multiplicar la población de cada año por 1.02 para calcular la población del año siguiente. Pero todavía lo tenemos que hacer 25 veces ¿no es así?

Serie de problemas **A**

1. ¿Por qué número multiplicarías la población de 1995 para obtener la estimación de la población de 1996?
2. Estima la población de 1996. Compara tu respuesta con el valor para la población de 1996 que encontraste en Piensa & comenta (2 años después de 1994).
3. Haz una tabla como la siguiente. En la segunda columna da entrada a los cálculos que harías, si usaras el método de cálculo de Kai y Lydia. Para la tercera columna, vuelve a plantear los cálculos en la segunda columna usando notación exponencial.

Años después de 1994	Población estimada de Tonga	
	Escrito como un producto	En notación exponencial
0	100,000	$100,000 \cdot 1.02^0$
1	$100,000 \cdot 1.02$	$100,000 \cdot 1.02^1$
2	$100,000 \cdot 1.02 \cdot 1.02$	$100,000 \cdot 1.02^2$
3		
4		
5		

4. Si la población de Tonga continúa aumentando en 2% cada año, ¿cuál será la población en el año 2019 ó 25 años después de 1994? Muestra cómo hallaste la respuesta.
5. ¿Cuál es el factor de crecimiento en esta situación?
6. Escribe una ecuación para mostrar cuál será la población p , n años después de 1994.
7. Supón que la población de Tonga aumentó 5% cada año en lugar de 2%. ¿Cuál sería el factor de crecimiento? Explica cómo lo sabes.
8. Si la población de Tonga aumentara 20% cada año, ¿cuál sería el factor de crecimiento? Escribe una ecuación para mostrar cuál sería la población p , n años después de 1994.



El orangután, una especie en peligro de extinción, tiene una vida promedio de 35 años. Una hembra adulta da a luz a un sólo bebé, en promedio cada 3 a 8 años.



Serie de problemas B

Muchos seres vivos crecen exponencialmente durante la primera parte de sus vidas. Después crecen más lentamente y a la larga se detienen. La tasa actual de crecimiento para un organismo particular depende de muchas cosas. Por ejemplo, la mayoría de las bacterias crecen más rápidamente en un ambiente cálido que en uno frío.

Estos estimados describen el crecimiento inicial de cuatro organismos vivos.

Organismo	Crecimiento en peso
Orangután	20% por mes
Planta de trigo	5% por día
Gatito	10% por semana
Lenteja de agua	50% por semana

A continuación, hay cuatro ecuaciones para estimar el peso de cada organismo a varios momentos. K representa el peso inicial del organismo y W representa su peso en el momento t .

Para cada problema, haz las Partes a y b.

- Relaciona cada ecuación con el organismo que representa.
- Menciona qué valor de t daría el peso del organismo después de 1 mes. (Supón que hay 4 semanas ó 30 días en 1 mes.)

1. $W = K \cdot 1.1^t$

2. $W = K \cdot 1.2^t$

3. $W = K \cdot 1.5^t$

4. $W = K \cdot 1.05^t$

Comparte & resume

- ¿Cuál de estas tablas representa crecimiento exponencial? Explica cómo lo sabes.

a.

x	1	2	3	4
y	3	12	48	192

b.

x	1	2	3	4
y	4	8	16	28

c.

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

d.

x	1	2	3	4
y	-60	-30	-20	-15

- Supón que una población de c personas crece $R\%$ cada año. Explica cómo puedes estimar el tamaño de la población después de t años.

Investigación 2 **Crece aun más**

En la Lección 3.1, resolviste un problema que involucraba bacterias *Escherichia coli*. Ahora, examinarás cómo una población de estas bacterias crece con el tiempo.

MATERIALES

calculadora
graficadora

Serie de problemas C

Estos datos muestran la población en el tiempo de una bacteria *E. coli* en una muestra de agua de una piscina particular.

Hora	Número de bacterias
0 (inicio)	50
1	100
2	200
3	400
4	800

- Supón que el patrón de la tabla continúa. ¿Cuál será la población en la Hora 5?
- Escribe una ecuación que dé la población p en la n ésima hora.
- ¿Cuál es el factor de crecimiento en esta situación? ¿Cómo aparece esto en la ecuación que escribiste?
- Tres estudiantes intentaron describir esta relación en palabras.
 - Evan: “La población comienza en 50 y aumenta en 50 cada hora”.
 - Tamika: “La población se duplica cada hora”.
 - Jesse: “La población comienza en 50 y se duplica cada hora”.
 - Una descripción no coincide con los datos. ¿De quién es y qué es incorrecto?
 - Observa las dos descripciones que *sí* se ajustan a los datos. ¿Podrías producir para cada una otra serie de población de bacterias que coincida con la descripción pero que sea diferente de los datos dados en la tabla? Explica.
- ¿Cómo usa a la población inicial la ecuación que escribiste en el Problema 2?
- Grafica la ecuación para el Problema 2 en tu calculadora. Usa la tabla para ayudarte a elegir los ajustes adecuados para la ventana.
 - Haz un bosquejo de la gráfica. Rotula los valores mínimos y máximos en cada eje.
 - Tu gráfica debe de mostrar puntos para valores no enteros de n . Piensa en el contexto de esta situación, ¿Tiene sentido que n tenga valores no enteros? Explica.
- ¿Aproximadamente cuándo excederá 100,000 la población de bacterias de la piscina? Explica cómo calculaste tu respuesta.

Serie de problemas **D**

La tabla tiene datos sobre la población de bacterias en una muestra tomada de otra piscina. La muestra se pone bajo una lámpara caliente y se deja sin perturbarse por 5 horas antes de que se mida el tamaño de la población por primera vez.

Suponiendo que la población de bacterias crece exponencialmente.

Hora	Bacterias
0 (inicio)	—
1	—
2	—
3	—
4	—
5	25,000
6	125,000
7	625,000

1. ¿Cuál es el factor de crecimiento?
2. Supón que el patrón de crecimiento no cambió, ¿cuál era la población aproximada de bacterias cuando se tomó la muestra de la piscina (en la hora 0)? Explica cómo determinaste tu respuesta.
3. Escribe una ecuación que muestre la población p de bacterias en esta muestra en la n ésima hora. ¿Cómo usas la población inicial y el factor de crecimiento en tu ecuación?
4. Revisa la gráfica que hiciste para el Problema 6 de la Serie de problemas C.
 - a. Usando los mismos ajustes para la ventana, grafica esa ecuación y la nueva que escribiste en el Problema 3. Haz un bosquejo de las gráficas, asegurándote de rotular los ejes. Rotula las gráficas con sus ecuaciones.
 - b. Compara las dos gráficas.

Comparte & resume

1. ¿Cómo puedes escribir una ecuación para una relación exponencial al observar una tabla de datos? Supón que los valores de entrada de la tabla son enteros consecutivos.
2. Una científica tiene c células de cierto tipo bacteria. Cada célula crece y se divide, de manera que cada célula ha sido reemplazada por x células 1 hora después. Escribe una expresión que te dé el número de células después de t horas.



Investigación 3 Desintegración exponencial

En las Investigaciones 1 y 2, examinaste relaciones con crecimiento exponencial. En cada situación, las cantidades se multiplican repetidamente por un número *mayor que 1*. En esta investigación, verás lo que ocurre cuando las cantidades se multiplican repetidamente por un número positivo *menor que 1*.

MATERIALES

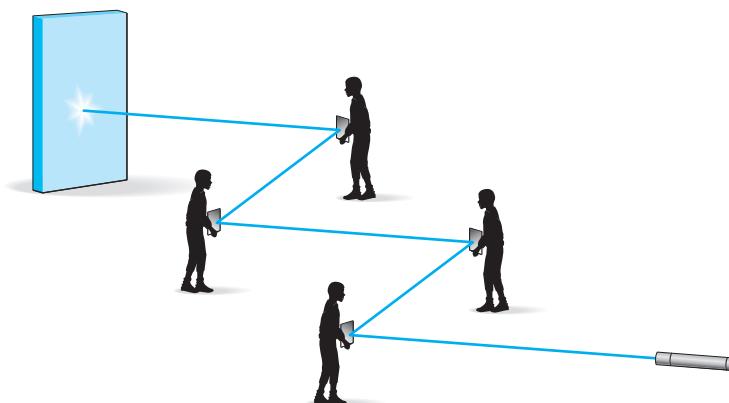
calculadora
graficadora



Una bombilla estándar de 75 vatios produce 1,065 lúmenes.

Serie de problemas E

El brillo de la luz puede describirse con una unidad llamada *lumen*. Cierta tipo de espejo refleja $\frac{3}{5}$ de la luz que choca contra él. Supón que una luz de 2,000 lúmenes se refleja en una serie de espejos.



1. Copia y completa la tabla para indicar cuánta luz se reflejaría en el *enésimo* espejo para valores de n entre 0 y 3. (El espejo 0 representa la luz original.)
2. ¿Cuánta luz se refleja en el *enésimo* espejo en la serie?
3. Grafica esta relación en tu calculadora. Pon el número de espejo en el eje horizontal y la cantidad de luz reflejada (en lúmenes) en el eje vertical. Dibuja la gráfica, y rotula los valores mínimo y máximo en cada eje.
4. El espejo final de una serie en particular refleja 12 lúmenes de luz. ¿Cuántos espejos hay en la serie?
5. El espejo final de otra serie refleja sólo aproximadamente 0.12 de lumen de luz. ¿Cuántos espejos hay en esta serie?

Número de espejo	Luz reflejada (lúmenes)
0	2,000
1	
2	
3	

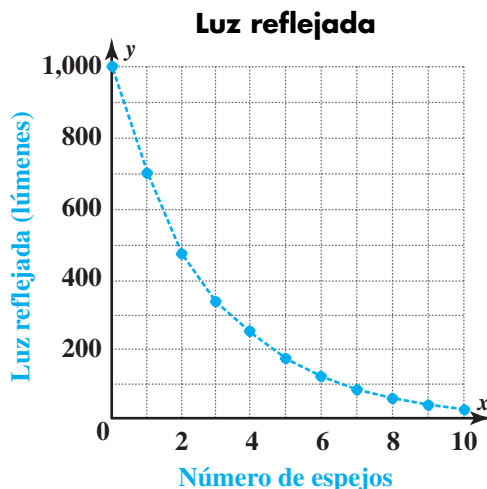


Los faraones del antiguo Egipto eran enterrados en cámaras subterráneas con una decoración elaborada. ¿Cómo podían ver los artistas para hacer un trabajo tan complicado? Ellos pueden haber usado una serie de espejos pulidos para reflejar la luz solar dentro de las cámaras interiores.

VOCABULARIO

factor de desintegración

6. La gráfica muestra la cantidad de luz reflejada por otra serie de espejos. La cantidad de luz reflejada por este tipo de espejo es diferente a la cantidad de luz reflejada por los otros espejos que has investigado. La intensidad de la luz que brilla en el primer espejo también es diferente.



- ¿Cuál es la intensidad de la luz reflejada en el primer espejo?
- ¿Cuánta luz reflejó el primer espejo?
- ¿Qué fracción de la luz reflejó este espejo?

Cuando las cantidades se multiplican repetidamente por un número positivo menor que 1 (como en el caso de la Serie de problemas E) las cantidades se *desintegran exponencialmente*. Otra forma de decir esto es que se *disminuyen exponencialmente*. El número por el que se multiplican repetidamente las cantidades se llama **factor de desintegración**. El factor de desintegración para el primer problema del espejo en la Serie de problemas E es $\frac{3}{5}$ ó 0.6.

Después de comprar un artículo, su valor disminuye año por año mientras se desgasta o pasa de moda. Esto se llama *depreciación*.

Piensa & comenta

Supón que tu escuela compra una computadora por \$1,500 y la computadora se deprecia 20% por año. Esto significa que al final de cada año la computadora vale 20% menos que su valor al inicio del año.

¿Cuál será el valor de la computadora al final del año 1?



*Desintegración proviene de **decadare**, una palabra del latín que significa “caer”. En matemáticas y astrofísica, **desintegrarse** significa “volverse más pequeño”. En biología y en el lenguaje cotidiano, significa “descomponerse”.*

He aquí lo que pensaron Ben y Marcus sobre la depreciación.

Marcus recordó el método demostrado en la Investigación 1. Para el crecimiento exponencial, sumas el cambio, que es un porcentaje de aumento, al valor original. Con la depreciación, el cambio es un porcentaje de disminución, de manera que tienes que restar:

$$\begin{aligned}\text{Valor al final del año} &= \$1,500 - 20\% \text{ de } \$1,500 \\ &= \$1,500 - 0.2(\$1,500)\end{aligned}$$

Marcus se dio cuenta de que él sólo pudo haber multiplicado por un solo número:

$$\begin{aligned}\$1,500 - 0.2(\$1,500) &= \$1,500(1 - 0.2) \\ &= \$1,500(0.8)\end{aligned}$$

Ben razonó que, al final del año, el valor de la computadora sería el 80% de su valor actual, como el $100\% - 20\% = 80\%$. Para calcular el valor de la computadora al final del año, simplemente toma el 80% de \$1,500:

$$\begin{aligned}80\% \text{ de } \$1,500 &= \$1,500(0.8) \\ &= \$1,200\end{aligned}$$

Ambos determinaron el cálculo (multiplicando por 0.8) que les deja calcular el valor al final del año usando el valor al inicio del año.

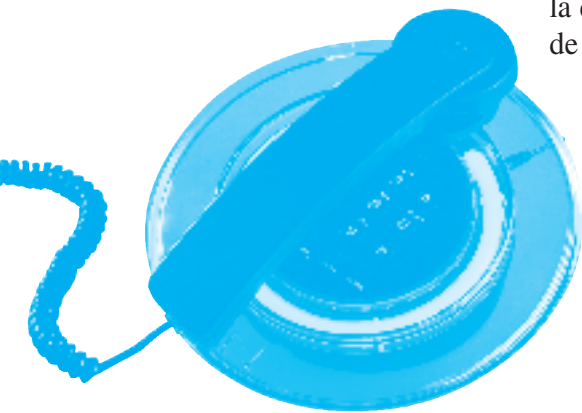
MATERIALES

calculadora
graficadora

Serie de problemas F

1. Calcula el valor de la computadora al final del segundo año y al final del tercer año.
2. Supón que la computadora continúa depreciándose 20% por año. ¿Cuál será su valor al final del año 25? Explica cómo encontraste tu respuesta.
3. Escribe una ecuación que dé el valor de la computadora V al final del año n .
4. ¿El valor de la computadora disminuye exponencialmente? Si es así, ¿cuál es el factor de desintegración?
5. Grafica la ecuación para el Problema 3 en tu calculadora.
 - a. Bosqueja la gráfica, recordando rotular los ejes.
 - b. ¿Cuándo la computadora valdrá la mitad de su valor actual, esto es, \$750?
 - c. ¿Cuándo la computadora valdrá un cuarto de su valor actual, o sea, \$375?





6. Supón que el valor de la computadora se deprecia 17% en lugar de 20%. ¿Qué multiplicarías por \$1,500 para obtener el valor al final del primer año? Explica cómo lo sabes.
7. Supón que el valor de la computadora se deprecia en 40%. ¿Cuál será el factor de desintegración?
8. Esta ecuación describe la depreciación de un teléfono de diseñador, en la que v representa el valor en dólares de los n años del teléfono a partir de ahora.

$$v = 219(0.75)^n$$

- a. ¿Cuál es el valor del teléfono ahora?
- b. ¿Cuál será el valor del teléfono en un año?
- c. ¿Cuál es el factor de desintegración de esta relación?
- d. Describe esta relación exponencial en palabras. Incluye el valor inicial del teléfono, el factor de desintegración y el periodo de tiempo en tu descripción.

Comparte & resume

Supón que $y = ab^x$ describe la desintegración exponencial de y a medida que x aumenta.

1. ¿Qué representa a ?
2. ¿Qué representa b ? ¿Cómo lo sabes?

Investigación

4

Identifica el crecimiento y la desintegración exponencial

Has visto varias relaciones exponenciales y examinado cómo representarlas con palabras, tablas, ecuaciones y gráficas. Ahora verás representaciones de diferentes relaciones e identificarás cuáles son exponenciales.

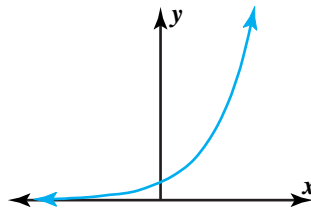
Serie de problemas G

1. Para cada ecuación, indica si ésta describe una relación exponencial. Si lo hace, indica si la relación incluye crecimiento o desintegración.

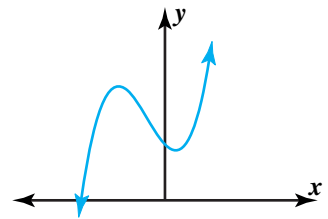
a. $y = 100 \cdot 3^x$	b. $y = 100 \cdot 0.3^x$	c. $y = 32 \cdot x$
d. $y = 20 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$	e. $y = 0.3(1.5^x)$	f. $y = 3x^2$

2. Considera estas gráficas.

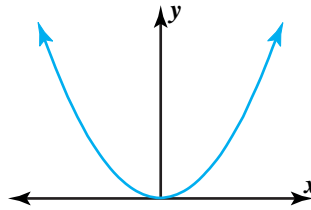
i.



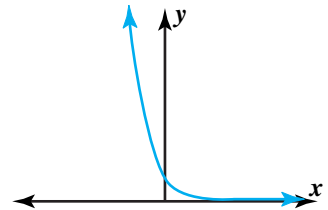
ii.



iii.



iv.

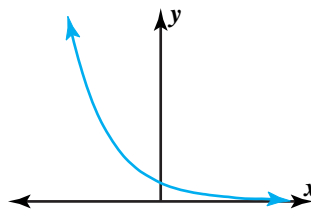


a. ¿Cuál de estas gráficas *no* describe una relación exponencial? Explica.

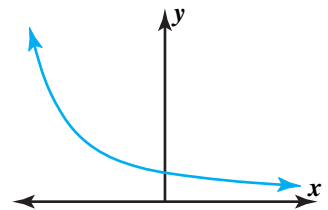
b. Supón que las gráficas que *podrían* describir una relación exponencial realmente *lo hacen*. Para cada una, ¿la relación incluirá crecimiento o desintegración?

3. Una de estas es una gráfica de $y = 0.5^x$. La otra es de $y = \frac{1}{x+1}$, ¿cuál describe una relación inversa? Las gráficas tienen escalas diferentes.

i.



ii.



a. Tan sólo viendo las gráficas, ¿puedes decir cuál describe una relación exponencial?

b. Una de las características importantes de una relación inversa es que su gráfica tendrá una recta vertical que la gráfica no puede cruzar.

Para $y = \frac{1}{x+1}$, esa recta vertical es $x = -1$. No hay valor de y cuando x es -1 porque no se puede dividir entre 0.

Existe algún valor de x para el cual la relación exponencial $y = 0.5^x$ no tiene valor de y ?

4. Para cada tabla indica si la relación descrita puede ser exponencial. Si puede serlo, menciona si incluirá crecimiento o desintegración. Explica tu razonamiento.

a.

x	y
1	6
2	9
3	12
4	15

b.

x	y
1	6
2	9
3	13.5
4	20.25

c.

x	y
111	56
112	28
113	14
114	7



Datos de interés

El sendero de los Apalaches, el sendero marcado para excursiones más grande del mundo, recorre más de 2,000 millas desde Maine hasta Georgia.

MATERIALES

calculadora
graficadora

- Un científico está realizando un cultivo de amebas. Las amebas se reproducen al separarse en dos y salen dos amebas. Supón que cada ameba en este cultivo se divide dos veces por día. Después de un día, una sola ameba se ha convertido en cuatro amebas. Supón que no muere ninguna de las amebas.

¿Es exponencial la relación entre el número de días desde que el científico comenzó con el cultivo y el número de amebas? Si es así, ¿cuál es el factor de crecimiento? De no ser así, ¿cómo lo sabes?

- Sydney camina por el sendero de los Apalaches, ella recorre 15 millas diarias. ¿Es exponencial la relación entre el número de días desde que Sydney comenzó la excursión y el número de millas que ella ha recorrido? Si es así, ¿cuál es el factor de crecimiento? De no ser así, explica cómo lo sabes.



En la siguiente serie de problemas, compara las relaciones exponenciales, con diferentes factores de crecimiento y desintegración.

Serie de problemas H

Imagina que has descubierto una tabla de datos de un científico que experimenta con cuatro cultivos de bacterias. Cada cultivo contiene células que fueron tratadas de manera diferente. Junto a la tabla, el científico anotó que todas las poblaciones cambiaron exponencialmente, pero con un factor de crecimiento y desintegración diferente. Desafortunadamente, el científico tiró café en la página, de manera que muchas entradas son ilegibles.

- Copia la tabla del científico, y completa los datos faltantes. Recuerda que cada cultivo cambió exponencialmente.

Conteo de bacterias

Días	Cultivo 1	Cultivo 2	Cultivo 3	Cultivo 4
0	100	100	100	100
1	300		70	
2		25		
3				12,500
4				

2. ¿Qué cultivos *crecieron* exponencialmente? ¿Cuál es el factor de crecimiento?
3. ¿Qué cultivos *disminuyeron* exponencialmente? ¿Cuál es el factor de desintegración?
4. Ahora compararás ecuaciones para los cuatro cultivos.
 - a. Para cada cultivo, escribe una ecuación que te dé la población p del cultivo, después de d días desde que inició el experimento.
 - b. ¿En qué se parecen tus ecuaciones?
 - c. ¿En qué se diferencian tus ecuaciones?
5. Ahora compararás las gráficas de los cuatro cultivos.
 - a. Comienza con los cultivos que *crecieron*. Grafica las ecuaciones para esos cultivos en la misma ventana de tu calculadora, con el eje horizontal indicando Días 0 a 3. Bosqueja las gráficas y rotula cada una con la ecuación apropiada. Asegúrate de rotular también los ejes.
 - b. Ahora considera los cultivos que *disminuyeron*. Gráficelos en la misma ventana, con el eje horizontal indicando Días 0 a 3. Bosqueja las gráficas.
 - c. ¿En qué se diferencian las gráficas de los cultivos que crecieron de las gráficas de los cultivos que disminuyeron?
 - d. ¿En qué se parecen las gráficas de los cultivos a aquéllas que se desintegraron?
 - e. ¿Cómo puedes distinguir cuál de los dos factores de crecimiento es mayor sólo al observar las gráficas de las ecuaciones? ¿Cómo puedes saber a partir de las gráficas cuál de los dos factores de desintegración es mayor?

Comparte & resume

1. ¿Cómo puedes distinguir de una tabla cuando la relación entre dos cantidades podría ser exponencial y no otro tipo de relación? Supón que los valores para una cantidad son enteros consecutivos.
2. ¿Cómo puedes distinguir en una gráfica cuándo la relación entre dos cantidades podría ser exponencial?
3. ¿En qué se diferencian las gráficas y ecuaciones que representan desintegración exponencial de aquéllas que representan crecimiento exponencial?

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica



1. **Ciencia biológica** Kyle ha estimado que la población de peces en el lago de su granja familiar es 1,000 este año.
 - a. Si la población aumenta 24% por año, ¿qué número puede multiplicar Kyle por la población de este año para estimar la población de peces del año próximo?
 - b. Estima el número de peces en el lago el año próximo.
 - c. Si la población aumenta 6.9% por año, ¿qué número puede multiplicar Kyle por la población de este año para estimar la población de peces del año próximo?
 - d. Estima el número de peces en el lago el año siguiente, con la información dada en la Parte c.
2. **Estudios sociales** La población de 1995 de Delhi, una ciudad en India, se estimó en 10,000,000. De 1990 a 1995, la población aumentó 4% por año. Supón que la población continúa creciendo 4% por año después de 1995.
 - a. Copia y completa la tabla.

Población de Delhi

Años después de 1995	Población estimada en notación estándar	Población estimada en notación exponencial
0	10,000,000	$10,000,000 \cdot 1.04^0$
1	10,400,000	$10,000,000 \cdot 1.04^1$
2		
3		
4		
5		

- b. Si la población de Delhi continúa aumentando en 4% por año, ¿cuál será en el año 2020?, ¿cuál será 25 años después de 1995? Escribe tu respuesta en notación estándar.
- c. Escribe una ecuación para representar la población p en n años después de 1995.
- d. ¿Cuál es el factor de crecimiento en esta situación?





Las bacterias son organismos unicelulares que sólo son visibles bajo aumento.

Ciencia biológica Los datos de cada tabla representan cómo crece en el tiempo cierta población de bacterias. Identifica el factor de crecimiento por cada tabla. Supón que el crecimiento es exponencial.

3. Horas desde el inicio	Población
0	2
1	10
2	50

4. Horas desde el inicio	Población
14	15,000,000
15	60,000,000
16	240,000,000

5. Horas desde el inicio	Población
25	3×10^8
26	6×10^8
27	1.2×10^9

6. Observa la tabla del Ejercicio 3. ¿Cuál será la población de bacterias en la hora n ?
7. La población de ranas en el lago de la familia de Kyle es de 1,000 este año.
 - a. Si la población disminuye 24% al año, ¿por qué número puede multiplicar Kyle la población de este año para estimar la población de ranas del año próximo?
 - b. Si la población disminuye 6.9% al año, ¿por qué número puede multiplicar Kyle la población de este año para estimar la población de ranas del año próximo?
8. Esta ecuación describe cómo cambia en el tiempo el valor, v , del carro nuevo de Geoffrey, medido en años, t .

$$v = 18,000(0.6)^t$$

Tala cree que el carro se deprecia en 60% por año. Tamika cree que se deprecia 40% por año. ¿Quién está en lo correcto? Explica.

Para cada ecuación, menciona si la relación en x y y es exponencial. Si lo es, menciona si incluye crecimiento o desintegración y menciona el factor de crecimiento o desintegración.

9. $y = 4x$

10. $y = 4^x$

11. $y = 5(4^x)$

12. $y = 5x^4$

13. $y = 5 \cdot 0.25^x$

14. $y = 5$



Datos de interés

Por miles de años, la gente masticó corteza y hojas de sauce para aliviar el dolor. Estas contienen ácido salicílico, el precursor del componente principal del remedio para el dolor, la aspirina.



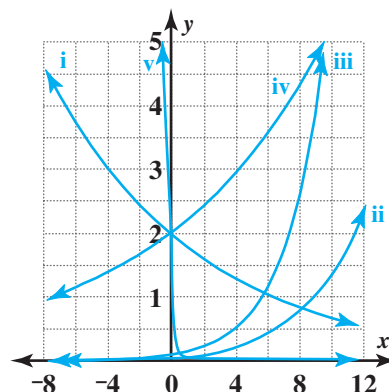
- 15. Ciencia biológica** Cuando ingieres medicinas para combatir un dolor de cabeza o para bajar la fiebre, la medicina entra en tu torrente sanguíneo. Tu cuerpo elimina la medicina de tal manera que en cada hora se elimina una fracción particular.

Supón que tienes 200 mg de medicina en tu torrente sanguíneo. Cada hora, un $\frac{1}{3}$ de la droga que todavía está en tu torrente sanguíneo se elimina.

- ¿Cuántos miligramos permanecerán en tu torrente sanguíneo al final de la primera hora?
- ¿Cuántos miligramos permanecerán al final de n horas?
- ¿Cuánto medicamento se habrá eliminado al final de n horas?

- 16.** A continuación haz cinco gráficas de relaciones exponenciales y cinco ecuaciones que las representen. Relaciona cada ecuación con una gráfica.

- $y = 2(1.1^x)$
- $y = 2(0.2^x)$
- $y = 0.1(1.3^x)$
- $y = 0.1(1.5^x)$
- $y = 2(0.9^x)$



- 17. Economía** Cuando inviertes tu dinero con *interés compuesto*, un porcentaje del dinero invertido se suma a tu inversión después de cierto tiempo. El porcentaje que se suma es el interés.

Supón que inviertes \$200 a 5% de interés por año.

- ¿Cuánto interés recibirás al final del primer año?
- ¿Cuánto dinero tendrás en total al final del primer año?
- ¿Cómo calculaste tu respuesta para la Parte b?

Cuando el interés se calcula anualmente, el interés que se suma se cuenta como parte de tu inversión para la próxima vez que se calcula el porcentaje.

- El interés que percibes en el segundo año es el 5% de la respuesta para la Parte b. ¿Cuánto interés recibirás en el segundo año?

En tus propias palabras

Describe una situación que implique crecimiento lineal o exponencial. ¿En qué se diferenciaría la situación si se diera otro tipo de crecimiento?

e. Completa la tabla.

Años	Valor de la cuenta
0	\$200
1	
2	
3	
4	
5	

f. ¿Cuánto dinero tendrás en la cuenta en 50 años si invirtieras \$200 a una tasa de interés del 5%, calculado anualmente? ¿Cuánto dinero tendrías en n años?

g. Cuando tenía 20 años, Ella invirtió \$600 a una tasa de interés del 5%, calculado anualmente. Cuando Jan tenía 45, invirtió \$2,000, también a una tasa del 5% calculado anualmente.

¿Cuánto dinero tendrá cada persona en el banco a la edad de 60 años?

18. Estudios sociales Cuando una enfermedad como la influenza comienza a propagarse, el número de personas enfermas se puede modelar a menudo al usar una relación exponencial.

A continuación, hay tablas realizadas para tres comunidades que muestran cómo cambió en el tiempo el número de personas que tuvieron una enfermedad particular. Las tres tablas representan el crecimiento exponencial y tienen el mismo factor de crecimiento.

Tabla A

Días desde que identificó la enfermedad	Número de personas enfermas
0	128
1	192
2	288

Tabla B

Días desde que identificó la enfermedad	Número de personas enfermas
5	200
6	300
7	450

Tabla C

Días desde que identificó la enfermedad	Número de personas enfermas
4	648
5	972
6	1,458

- ¿Cuál es el factor de crecimiento en las tres tablas?
- ¿Podrá ser que las Tablas A y B describan datos de la misma comunidad? Explica tu respuesta.
- ¿Podría ser que las Tablas A y C describan datos de la misma comunidad? Explica tu respuesta.

19. Un científico registró los datos de crecimiento de una población de bacterias, pero derramó jugo de naranja en su cuaderno.

Hora	Población
0	
1	600
2	
3	21,600
4	

- a. Supón que la población crece exponencialmente y completa la tabla del científico.
- b. ¿Cuál es el factor de crecimiento para la población de bacterias?
- c. ¿Cuántas bacterias habrá en la hora n ?

20. **Ciencia biológica** Se proyecta que la población de aves en una reserva para la vida silvestre disminuirá en el tiempo de acuerdo con esta ecuación, donde x es el tiempo en años a partir de ahora.

$$y = 1,000(0.7)^x$$

- a. ¿Cuál es la población actual de aves?
- b. Si la población de aves continúa disminuyendo de acuerdo con esta ecuación, ¿desaparecerán alguna vez las aves de esta reserva? Explica.



21. **Química** La datación con carbono-14 se usa para estimar la edad de objetos muy viejos, especialmente fósiles. Mientras están vivos, las plantas y los animales contienen un compuesto químico llamado carbono-14.

El carbono-14 es radioactivo, pero no a un nivel peligroso. Cuando la planta o el animal muere, la cantidad de carbono-14 que permanece en el cuerpo disminuye exponencialmente.

Cada tipo de material radioactivo tiene una *tasa de desintegración*. Esta tasa determina cuánto tiempo pasará para que la cantidad de material radioactivo disminuya a la mitad. Este periodo de tiempo es la *media vida*.

Imagina que un científico trabaja con cuatro muestras de compuestos radioactivos. Estas ecuaciones describen diferentes tasas de desintegración para los cuatro compuestos, donde a es la cantidad y t es el tiempo en siglos:

- Muestra 1: $a = 100 \cdot 0.8^t$
- Muestra 2: $a = 100 \cdot 0.7^t$
- Muestra 3: $a = 100 \cdot 0.6^t$
- Muestra 4: $a = 100 \cdot 0.5^t$



La datación con radio-carbono ha ayudado a determinar la edad de muchos artefactos y estructuras como Stonehenge, los pergaminos del mar Muerto y el Hombre de Kennewick, el esqueleto de 9,000 años de edad encontrado en el estado de Washington en 1996.

a. Relaciona cada muestra con una de las tablas a continuación.

i.

Tiempo (siglos)	Cantidad del compuesto (gramos)
0	100.0
1	50.0
2	25.0
3	12.5

ii.

Tiempo (siglos)	Cantidad del compuesto (gramos)
3	51.2
4	41.0
5	32.8
6	26.2

iii.

Tiempo (siglos)	Cantidad del compuesto (gramos)
2	36.0
3	21.6
4	13.0
5	7.8

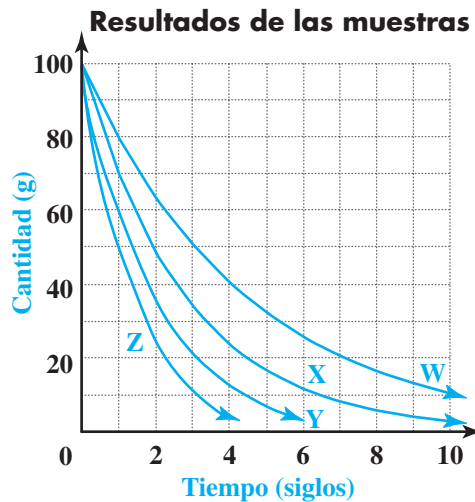
iv.

Tiempo (siglos)	Cantidad del compuesto (gramos)
7	8.2
8	5.8
9	4.0
10	2.8

b. ¿Cuál es el valor inicial de cada muestra?

c. ¿Cuál es el factor de desintegración de cada muestra?

d. Relaciona cada muestra con una de las gráficas a continuación.



e. Para cada muestra, aproxima cuánto tomará para que la cantidad del compuesto caiga a la mitad de su valor original. Ésta es la media vida del compuesto.

- 22.** Dion y Lucita están observando esta tabla de datos, que representa el crecimiento exponencial de bacterias en cierta piscina.

Dion dice que la ecuación $p = 10 \cdot 2^h$ describe la tabla, donde p es la población y h es el número de horas.

- a.** ¿Es correcta la ecuación de Dion?

Lucita dice que la ecuación $p = 10 \cdot 16,777,216^d$ describe la tabla, donde p es la población y d es el número de días.

Hora	Población
0	10
1	20
2	40
4	80
5	160
⋮	⋮
⋮	⋮
24	167,772,160
25	335,544,320

- b.** Expresa 1 hora ($h = 1$) como una fracción de un día. Haz lo mismo para 2 horas, 3 horas y 24 horas.
- c.** Usa una calculadora para probar la ecuación de Lucita. Calcula la población para el número de días correspondientes a 1 hora, 2 horas, 3 horas y 24 horas. ¿Parece que su ecuación es correcta?
- d.** Resuelve el dilema de Dion y Lucita. Si una o ambas de las ecuaciones es incorrecta, explica por qué. Si ambas de las ecuaciones son correctas, explica cómo puede ser esto.

- 23. Reto** Examina esta tabla.

- a.** Grafica los puntos en la tabla. Dibuja una línea curva punteada a través de estos.
- b.** En todas las relaciones exponenciales que has visto, y creció o disminuyó exponencialmente al aumentar x . En esta relación, x crece exponencialmente al crecer y . ¿Cuál es el factor de crecimiento?

x	y
0.1	-1
1	0
10	1
100	2
1,000	3
10,000	4

Repaso mixto

Geometría Determina el área del cuadrado con la longitud de arista dada.

- 24.** longitud de la arista 3 m
- 25.** longitud de la arista 22 cm
- 26.** Calcula una ecuación para la recta que pasa a través de los puntos $(-2, 0)$ y $(-6, -6)$.
- 27.** Determina una ecuación para la recta con pendiente -2.5 que pasa a través del punto $(2, -4)$.





Recuerda

Las rectas siempre tienen una *diferencia constante* en sus valores de y . Es decir, cuando los valores x cambian en una cierta cantidad, como 1 ó 2, los valores de y también cambian en una cierta cantidad.

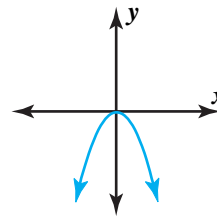
28. Relaciona cada ecuación con su gráfica.

a. $y = -x^2 + 2$

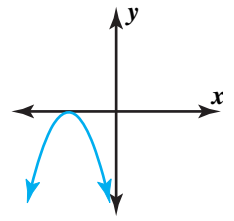
b. $y = (x - 2)^2$

c. $y = -x^2$

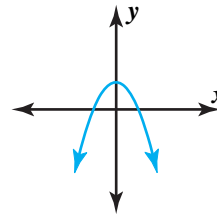
d. $y = -(x + 2)^2$



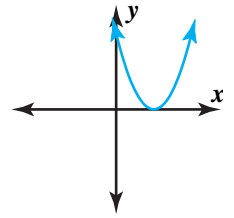
Gráfica F



Gráfica G



Gráfica H



Gráfica J

Para las ecuaciones lineales en los Ejercicios 29 al 31, contesta las Partes a y b.

a. ¿Cuál es la diferencia constante entre los valores de y al aumentar los valores de x en 1?

b. ¿Cuál es la diferencia constante entre los valores de y al disminuir los valores de x en 3?

29. $y = \frac{x}{2}$

30. $2x - 2 = y$

31. $\frac{y}{3x} = 3$

32. Deportes Un acantilado popular entre los clavadistas tiene una altura de 18 metros a partir de la superficie del agua. Una vez que el clavadista parte del acantilado, la altura en metros h después de t segundos se puede aproximar con esta ecuación:

$$h = 18 - 4.9t^2$$

a. Crea una tabla de alturas para varios valores de t . Cuando elijas valores para tu tabla, piensa en qué valores tendrían sentido en esta situación.

b. Usa tu tabla para bosquejar una gráfica de la relación entre altura y tiempo.

c. Usa tu gráfica para predecir cuánto tardará un clavadista en alcanzar el punto medio del recorrido del clavado.

d. Usa tu gráfica para predecir cuánto tardará un clavadista en golpear la superficie del agua.

Has trabajado mucho con números elevados a exponentes enteros positivos y negativos. Sabes cómo evaluar 2^3 , 4^{-3} e inclusive $(-100)^{100}$.

Pero que tal si te preguntaran, “¿Qué número al cuadrado es 441?” Esto es lo mismo que saber el exponente (en este caso, 2, pues estás elevando al cuadrado), y el resultado (en este caso, 441) pero sin saber la base. En esta lección, examinarás problemas como éste.

Explora

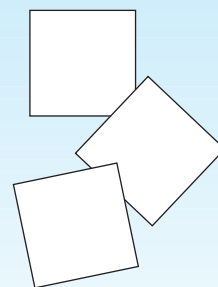
¿Por qué crees que a estos números se les llama “números al cuadrado” o “cuadrados perfectos”?
¿Qué tienen que ver con un cuadrado?

16

64

100

Sin usar la tecla $\sqrt{}$ de tu calculadora, intenta calcular la longitud del lado de un cuadrado cuya área es 12.5316.



Puedes tomar un número que no es un entero, como 5.5, y convertirlo en la longitud del lado de un cuadrado. Un cuadrado con lados de longitud 5.5 tiene un área de 30.25. Aunque 30.25 no es un cuadrado perfecto, este es aún un número multiplicado por sí mismo.

Investigación 1 Raíces cuadradas

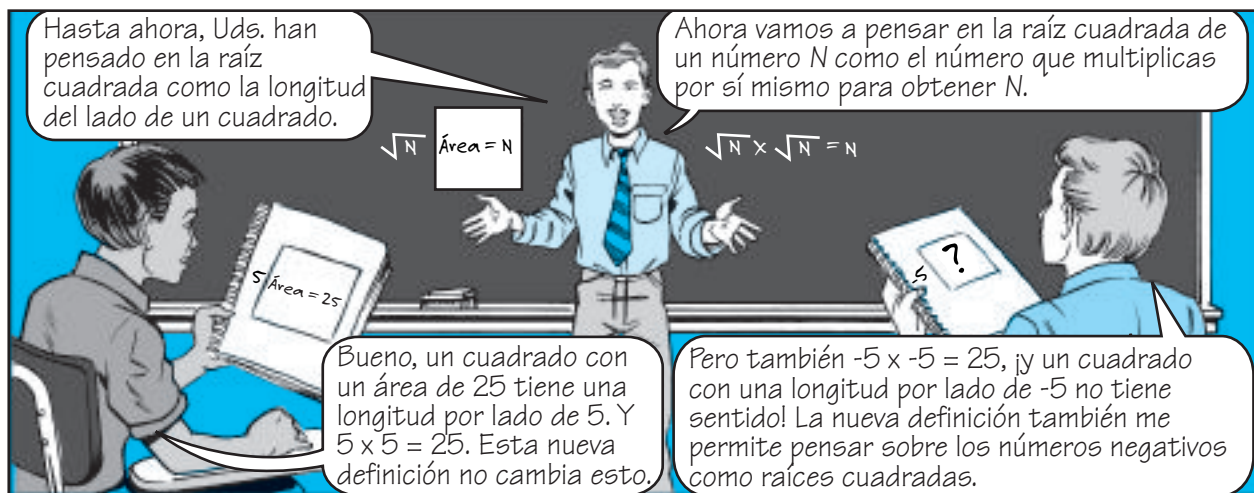
Para resolver una ecuación como $2x = 6$, puedes pensar en “anular” la multiplicación por 2 que da el producto 6. Para anular la multiplicación, divides $6 \div 2 = 3$, de manera que x debe ser 3.

Piensa de nuevo sobre la pregunta, “¿Qué número al cuadrado es 441?” Esto se puede escribir como la ecuación $x^2 = 441$. Para calcular la respuesta, puedes pensar en “anular” el proceso de elevar un número al cuadrado. Es decir, puedes calcular las **raíces cuadradas** de 441.

VOCABULARIO

raíz cuadrada

Pensar sobre las soluciones de una ecuación te da una nueva manera de ver a las raíces cuadradas, como descubrieron los estudiantes de esta clase.



Tanto 5 como -5 son raíces cuadradas de 25. Es importante recordar cuando quieres resolver $x^2 = 25$, porque hay dos respuestas: $x = 5$ y $x = -5$.

VOCABULARIO

radical

El símbolo $\sqrt{\quad}$ se llama **radical**. Se usa para indicar la raíz cuadrada *positiva* de un número, de manera que $\sqrt{25} = 5$. Para indicar la raíz cuadrada *negativa* de un número, escribe antes un signo negativo: $-\sqrt{25} = -5$.

Serie de problemas A

Resuelve estos problemas sin usar tu calculadora.

- $\sqrt{49}$
- ¿Cuáles son las raíces cuadradas de 100?
- $-\sqrt{225}$
- ¿Cuáles son las raíces cuadradas de 2.25?
- $\sqrt{0}$
- ¿Cuál es la raíz cuadrada negativa de 0.01?
- ¿Cuántas raíces cuadradas tiene un número positivo?
- ¿Cuántas raíces cuadradas tiene 0?
- ¿Cuántas raíces cuadradas tiene un número negativo?
- Decide si el enunciado a continuación es verdadero o falso. Explica tu respuesta.

$$-4 = \sqrt{16}$$



Los números con los que trabajas se llaman *números reales*. El conjunto de números reales son todos los números en una recta numérica. Algunas personas, como los matemáticos y los ingenieros, también usan el conjunto de *números complejos*. Al usar números complejos, inclusive los números negativos tienen raíces cuadradas.

Serie de problemas B

Resuelve estos problemas sin usar una calculadora.

1. $(\sqrt{49})^2$
2. $(\sqrt{2.25})^2$
3. $(\sqrt{81})^2$
4. $(-\sqrt{100})^2$
5. $(-\sqrt{4})^2$
6. $-(\sqrt{0.04})^2$
7. ¿Qué sucede cuando elevas al cuadrado la raíz cuadrada de un número n ? ¿Por qué?

Usa una calculadora para verificar tus resultados a estos problemas.

8. $\sqrt{100^2}$
9. $\sqrt{(-4)^2}$
10. $\sqrt{0.04^2}$
11. $\sqrt{(-0.04)^2}$
12. Considera el valor de $\sqrt{n^2}$.
 - a. Supón que n es positiva. Escribe una expresión equivalente a $\sqrt{n^2}$ que no tenga radicales. Ayuda: Considera tu respuesta al Problema 8.
 - b. Supón que n es negativo. Escribe una expresión equivalente a $\sqrt{n^2}$ que no tenga radicales. Ayuda: Considera tus respuestas a los Problemas 9 y 11.
 - c. Si es posible, escribe una sola expresión equivalente a $\sqrt{n^2}$ que no tenga radicales, para cualquier valor de n (positivo, negativo ó 0.) Ayuda: Considera tus respuestas a los Problemas 10 y 11.

Serie de problemas C

Resuelve estas ecuaciones, si es posible, usa el método que prefieras. Si una ecuación no tiene solución escribe “sin solución” y explica por qué.

1. $\sqrt{x} = 7$
2. $\sqrt{x} + 8 = -6$
3. $0 = 2.3 + \sqrt{x}$
4. $\sqrt{x + 2} = 5$
5. $x = \sqrt{-16}$
6. $x^2 = 64$



Comparte resume

1. Juana, una estudiante del sexto grado, dijo, —Mi hermana mayor adora contarme sobre su clase de matemáticas. Cuando aprendió las raíces cuadradas, me mostró algunos ejemplos, como $\sqrt{4} = 2$. Al principio, yo pensé que calcular la raíz cuadrada era lo mismo que calcular la mitad de algo.

Escribe una o dos oraciones que expliquen la diferencia entre calcular la mitad de algo y calcular la raíz cuadrada de algo.

2. ¿Hay algunos números para los que obtener la mitad da el mismo resultado que obtener la raíz cuadrada? Si es así, ¿cuáles son?

Investigación

2

Reduce expresiones con radicales

¿Qué sucede cuando intentas sumar, restar, multiplicar o dividir números que implican radicales? La próxima serie de problemas te ayudará a pensar sobre cómo y cuándo puedes combinar términos con radicales.

Serie de problemas D

1. ¿La raíz cuadrada de una suma es igual a la suma de raíces cuadradas? es decir, ¿ $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

Completa la siguiente tabla, intenta con varios ejemplos. Para la última columna, elige tus propios valores que intentarás para x y y . Después, haz una conjetura sobre si las dos expresiones son equivalentes.

(x, y)	(0, 0)	(4, 4)	(36, 16)	$(25, \frac{1}{4})$	(__, __)
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$					
$\sqrt{x + y}$					

2. Ahora haz lo mismo para la multiplicación: ¿Es $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$? Completa la tabla y después haz una conjetura.

(x, y)	(0, 0)	(5, 5)	(9, 25)	(0.64, 100)	(__, __)
$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$					
$\sqrt{x \cdot y}$					

3. Completa la tabla y haz una conjetura acerca de las diferencias de las raíces cuadradas.

(x, y)	(0, 0)	(4, 4)	(81, 49)	$(\frac{25}{9}, \frac{16}{9})$	(__, __)
$\sqrt{x} - \sqrt{y}$					
$\sqrt{x - y}$					

4. Completa la tabla y haz una conjetura sobre la división de raíces cuadradas.

(x, y)	(0, 2)	(3, 3)	(4, 16)	$(\frac{4}{9}, 2.25)$	(__, __)
$\sqrt{x} \div \sqrt{y}$					
$\sqrt{x \div y}$					

Expresiones que contienen uno o más números o variables bajo un signo radical se llaman *expresiones radicales*. Todas éstas son expresiones radicales.

$$3\sqrt{x} \quad 2.3m\sqrt{3m} \quad x + 3\sqrt{x}$$

El cálculo con expresiones radicales puede ser difícil cuando las expresiones son complicadas. A veces, ayuda *reducir* las expresiones radicales para facilitar el trabajo con ellas. Una expresión radical se reduce cuando

- los números bajo los signos radicales no tienen factores al cuadrado
- el número de signos radicales en la expresión es el más pequeño posible

En la Serie de problemas D, probablemente hiciste la conjetura que

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$$

Siempre y cuando x y y no sean negativos, es decir, positivos ó 0, esta conjetura es verdadera.

Puede ser que también hicieras la conjetura de que

$$\sqrt{x} \div \sqrt{y} = \sqrt{x \div y}$$

Esta regla es verdadera para una x no negativa y una y positiva. Estas reglas te ayudarán a aprender cómo reducir expresiones radicales.

Para reducir un número bajo un símbolo de raíz cuadrada, busca los factores del número que sean cuadrados perfectos. Vuelve a plantear el número como un producto en el que por lo menos un factor sea un cuadrado perfecto, y obtén las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos.



EJEMPLO

Para reducir $\sqrt{24}$, vuélvelo a plantear como $\sqrt{4 \cdot 6}$ ó $\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}$.
Puesto que $4 = 2 \cdot 2$, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}$ es equivalente a $2 \cdot \sqrt{6}$ ó $2\sqrt{6}$.

Para reducir $\sqrt{18x^4}$, vuélvelo a plantear como $\sqrt{9x^4 \cdot 2}$ ó $\sqrt{9x^4} \cdot \sqrt{2}$.
Puesto que $9x^4 = 3x^2 \cdot 3x^2$, $\sqrt{9x^4} \cdot \sqrt{2}$ es equivalente a $3x^2\sqrt{2}$.

Para reducir $\sqrt{30}$, puedes volverlo a plantear como $\sqrt{15 \cdot 2}$, $\sqrt{10 \cdot 3}$ ó como $\sqrt{5 \cdot 6}$. Sin embargo, como ninguno de los factores de 30 son cuadrados perfectos, $\sqrt{30}$ ya está reducido.

Los cuadrados perfectos pueden ser difíciles de hallar. Por ejemplo, para reducir $\sqrt{48}$, puedes escribirlo como $\sqrt{8 \cdot 6}$. Pero como ni 8 ni 6 son cuadrados perfectos, puede ser que pienses que $\sqrt{48}$ ya está reducido.

Sin embargo, si vuelves a plantear $\sqrt{48}$ como $\sqrt{4 \cdot 12}$, puedes reducir:

$$\begin{aligned}\sqrt{48} &= \sqrt{4 \cdot 12} \\ &= 2 \cdot \sqrt{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Después reduce } \sqrt{12} \text{ aún más: } &= 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} \\ &= 2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\ &= 4 \cdot \sqrt{3} \text{ ó } 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Serie de problemas E

Reduce si es posible. Supón que todas las variables son positivas.

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| 1. $\sqrt{75}$ | 2. $\sqrt{60}$ |
| 3. $\sqrt{42}$ | 4. $\sqrt{\frac{1}{8}}$ |
| 5. $\sqrt{50x^3}$ | 6. $\sqrt{72a^4b^5}$ |

Ahora ve si puedes “invertir la reducción” de expresiones. Completa cada espacio con una expresión diferente de la que se te da. Supón que todas las variables no son negativas.

- $2\sqrt{3}$ es la forma reducida de _____.
- $6\sqrt{2}$ es la forma reducida de _____.
- $5y\sqrt{3}$ es la forma reducida de _____.
- $\frac{1}{4}x^2\sqrt{3x}$ es la forma reducida de _____.

Cuando sumas o restas términos con radicales, los términos con radicales se comportan en formas similares a expresiones con variables.

EJEMPLO

Para reducir expresiones con variables, combina *términos semejantes*.

$$\begin{aligned}3x + 4y - 2x + 5y &= 3x - 2x + 4y + 5y \\&= (3 - 2)x + (4 + 5)y \\&= 1x + 9y \\&= x + 9y\end{aligned}$$

Para reducir expresiones con radicales, combina *términos con radicales semejantes*.

$$\begin{aligned}3\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} &= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} \\&= (3 - 2)\sqrt{2} + (4 + 5)\sqrt{5} \\&= 1\sqrt{2} + 9\sqrt{5} \\&= \sqrt{2} + 9\sqrt{5}\end{aligned}$$

A veces, debes reducir los términos antes de poder combinarlos:

$$\begin{aligned}\sqrt{20} + \sqrt{45} &= \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\&= (2 + 3)\sqrt{5} \\&= 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

Serie de problemas F

Para los Problemas 1 al 4, decide si las dos expresiones son equivalentes. Explica tu razonamiento o muestra tu trabajo.

1. $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$
 2. $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ y $3\sqrt{5}$
 3. $\sqrt{50} + \sqrt{98}$ y $12\sqrt{2}$
 4. $-\frac{1}{2}\sqrt{80}$ y $\sqrt{45} + \sqrt{20} - 7\sqrt{5}$
 5. Escribe una expresión equivalente a $2\sqrt{3}$ que incluya suma o resta.
 6. A continuación, hay cuatro expresiones radicales.
 - i. $-3\sqrt{3} + \sqrt{48}$
 - ii. $2\sqrt{12} - \sqrt{27}$
 - iii. $12\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$
 - iv. $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$
- a. Reduce cada expresión.
- b. ¿Son algunas de las expresiones equivalentes entre ellas? Si lo son, ¿cuáles?



Comparte & resume

Cuando trata de reducir términos radicales, Susan se atora si no puede encontrar inmediatamente un factor que sea un cuadrado perfecto. Por ejemplo, ella dijo, “Cuando trato de reducir $\sqrt{60}$, obtengo $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}$. Ninguno de los dos son cuadrados perfectos, de modo que no puedo deducir como reducirlo”.

1. Reduce $\sqrt{60}$.
2. Describe un método que podría usar Susan para calcular los factores correctos. Tu método debe funcionar para cualquier problema que Susan intente resolver.

Investigación 3 Enésimas raíces

En la Investigación 1, “invertiste” el proceso de elevar números al cuadrado. Ahora anularás el proceso de elevar números a potencias más grandes.

Piensa & comenta

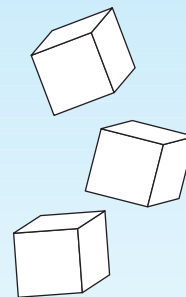
Piensa por qué los “números cúbicos” o “cubos perfectos” tienen esos nombres. Da un ejemplo de un número cúbico y demuestra como se relaciona con un cubo.

Un número al cubo es igual a 8. ¿Cuál es ese número?
¿Cuántas respuestas puedes encontrar?

Algún número al cubo es igual a -64 . ¿Cuál es ese número?
¿Cuántas respuestas puedes encontrar?

¿Hay algún número al cuadrado que sea igual a -64 ? Si lo hay, ¿cuál es?

Un número al cubo es igual a -0.027 . ¿Cuál es ese número?



Cuando contestas preguntas como “¿A qué es igual N , si $N^3 = -64$?”, estás anulando el proceso de elevar un número al cubo. Para contestar esta pregunta, supón que alguien ha elevado al cubo un número y te dijo el resultado, y tú quieres calcular el número original.

La raíz cúbica de 64 es 4, porque 4 al cubo es 64. Es decir, $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. El signo radical se usa para indicar raíces cúbicas al agregar un “3”:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Cada número tiene una raíz cúbica. Para las raíces cuadradas, el radical por sí mismo siempre representa la raíz cuadrada positiva. Sin embargo para las raíces cúbicas, la raíz cúbica de un número positivo siempre es positiva y la raíz cúbica de un número negativo siempre es negativa. De manera que el símbolo $\sqrt[3]{}$ representa una raíz cúbica que tiene un número.

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Serie de problemas

Evalúa sin usar una calculadora.

1. $\sqrt[3]{8}$

2. $\sqrt[3]{-125}$

3. $\sqrt[3]{0.000001}$

4. $(\sqrt[3]{8})^3$

5. $(\sqrt[3]{-125})^3$

6. $(\sqrt[3]{37})^3$

7. ¿Qué sucede cuando elevas al cubo la raíz cúbica de cualquier número?
¿Por qué?

Resuelve cada ecuación con cualquier método que elijas.

8. $\sqrt[3]{x} = -\frac{1}{8}$

9. $6 = \sqrt[3]{2n}$

10. $\sqrt[3]{z+5} = -2$

También puedes obtener raíces más grandes. La *cuarta raíz* de 625 es 5, porque 5 a la cuarta potencia es 625. Es decir, $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Otra cuarta raíz de 625 es -5 , porque $-5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5 = 625$.

El radical para la cuarta raíz *positiva* es $\sqrt[4]{}$, de manera que $\sqrt[4]{625} = 5$. Sin embargo, si quieres las cuartas raíces de 625, necesitas considerar tanto -5 como 5.

Piensa & comenta

¿Qué crees que sea una *quinta raíz*? Da un ejemplo.

¿Qué crees que sea una *sexta raíz*? Da un ejemplo.

¿Cuál es el otro nombre para una *segunda raíz*?

¿Cuál es el otro nombre para una *tercera raíz*?



En el uso del conjunto de números complejos, todos los números excepto el 0 tienen tres raíces cuadradas.

Las raíces quintas, sextas y las sucesivas son similares a las raíces cuadradas y las raíces cúbicas.

VOCABULARIO

enésima raíz



La *enésima* raíz de x también se puede expresar como esto:

$$x^{\frac{1}{n}}$$

En el uso de números complejos, todos los números excepto el 0 tienen raíces *enésimas*.

En general, $\sqrt[n]{}$ denota la **enésima raíz** de x .

- Cuando n es par, $\sqrt[n]{}$ denota la *enésima* raíz positiva. La *enésima* raíz negativa es $-\sqrt[n]{x}$. Cuando n es par, x debe ser no negativa.
- Cuando n es impar, $\sqrt[n]{}$ es positiva si x es positiva y negativa si x es negativa.

La *enésima* raíz de 0 siempre es 0, sin importar el tamaño de n .

Percibe que la raíz cuadrada de x se escribe como $\sqrt{x}$, no como $\sqrt[2]{x}$. Si no hay un número se supone que el radical representa la raíz cuadrada.

Serie de problemas H

Evalúa sin usar una calculadora.

1. $\sqrt[5]{32}$
2. Calcula las cuartas raíces de 256.
3. Calcula la séptima raíz de -128 .
4. $\sqrt[6]{729}$
5. ¿Hay algunos números para los que las segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta raíces sean el mismo número? Si los hay, enuméralos.
6. ¿Hay algunos números con una cuarta raíz positiva y negativa a la vez? Si los hay, da un ejemplo. Si no, explica por qué no.
7. ¿Es posible encontrar un número con sólo una cuarta raíz positiva? Si lo es, da un ejemplo. Si no, explica por qué no.
8. ¿Es posible encontrar un número con una quinta raíz positiva y negativa a la vez? Si lo es, da un ejemplo. Si no lo es, explica por qué no.

Ordena cada conjunto de números de menor al mayor.

9. $\sqrt[5]{7}$ $\sqrt[3]{7}$ $\sqrt[4]{7}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt[6]{7}$ 10. $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[81]{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[80]{\frac{1}{4}}$

Comparte & resume

1. Describe la relación general entre encontrar la *enésima* raíz de un número y elevar un número a la *enésima* potencia.
2. ¿Es posible encontrar un número con una novena raíz positiva y negativa a la vez? Si lo es, da un ejemplo. Si no lo es, explica por qué no.

Investigación 4 Números irracionales

VOCABULARIO números racionales

Los enteros y fracciones tales como $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{10}$ son *números racionales*. La palabra *racional* proviene de la palabra *razón*, que te puede ayudar a recordar la definición de los números racionales. Un **número racional** es un número que se puede escribir como la razón o cociente de dos enteros.

EJEMPLO

El número 0.5 es un número racional porque se puede escribir como la razón de dos enteros, tales como $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{14}$.

El número -1.8 es un número racional porque se puede escribir como una razón de dos enteros, tales como $-\frac{9}{5}$ y $-\frac{27}{15}$.

El número 3 es también un número racional. Se puede escribir como $\frac{3}{1}$ ó $\frac{9}{3}$, por ejemplo.

VOCABULARIO números irracionales números reales

Los números que *no se pueden* escribir como una razón de dos enteros se llaman **números irracionales**. Los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de **números reales**. Todos los números reales se pueden poner en la recta numérica.

Piensa & comenta

A continuación hay siete números. Intenta decidir si cada número es racional al buscar una razón de dos enteros que sea igual al número.

3 0.7 -2.55 $\sqrt{20}$ 4.5678 $\sqrt{25}$ $7.\bar{4}$

Piensa en números con un dígito que no son cero a la derecha del punto decimal, tal como 0.7. ¿Son racionales tales números?

Piensa en los números que tienen dos dígitos que no son cero a la derecha del punto decimal, tal como 2.55. ¿Son racionales tales números?

¿Son racionales los números con tres dígitos que no son cero a la derecha del punto decimal? ¿Son racionales los números con 10 dígitos que no son cero a la derecha del punto decimal? ¿Son racionales los números con n dígitos que no son cero a la derecha del punto decimal?

¿Pueden ser racionales por siempre los números cuyos dígitos no son cero a la derecha del punto decimal? Explica.



Recuerda

Una barra sobre uno o más numerales significa que esos numerales se repiten. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 2.\overline{15} &= 2.1555 \dots \\ 9.\overline{32} &= 9.323232 \dots \end{aligned}$$



Un grupo llamado los Pitagóricos en la antigua Grecia habían desarrollado una forma de vida basada en la idea de que los números racionales son la esencia de todas las cosas. Cuando se probó la existencia de los números irracionales, ¡tomaron medidas extremas para esconderlos!



El Partenón, en Atenas, Grecia, se construyó durante el siglo V A.C.

En Piensa & comenta, puede que no hayas estado seguro si $\sqrt{20}$ es racional o irracional. Ahora explorarás este número.

Serie de problemas I

1. Usa tu calculadora, para evaluar $\sqrt{20}$. ¿Qué muestra la calculadora para la forma decimal de $\sqrt{20}$?
2. Usa tu calculadora para multiplicar tu respuesta al Problema 1 por sí misma. ¿Qué obtuviste?
3. Ahora imagina que multiplicas tu respuesta al Problema 1 por sí misma *sin* usar la calculadora. ¿Cuál será el dígito a la extrema derecha del producto? (Por ejemplo, el dígito a la extrema derecha de 4.36 es 6 y el dígito a la extrema derecha de 121.798 es 8.)
4. ¿Podría realmente ser igual a $\sqrt{20}$ el número que mostró tu calculadora en el Problema 1? ¿Cómo pueden explicarse tus hallazgos?

Las calculadoras pueden ser engañosas porque sólo tienen suficiente espacio en la pantalla para mostrar cierto número de dígitos. Si un número tiene más dígitos de los que puede manejar una calculadora, algunos dígitos al final sencillamente no aparecen en la pantalla.

Entonces, ¿qué pasa con $\sqrt{20}$? Tiene más dígitos de los que puede mostrar una calculadora. Esto significa que puede ser uno de tres tipos de números:

- Podría tener un número fijo de dígitos no nulos a la derecha del punto decimal.

Tales números se llaman *decimales terminales* porque los dígitos se acaban o a la larga se terminan. Como puedes encontrar una razón de enteros igual a un decimal terminal, estos números son racionales.

- Podría tener dígitos no nulos a la derecha del punto decimal que continúan por siempre en un patrón periódico; $0.\overline{324}$ es un ejemplo de tal número.

Tales números se llaman *decimales no terminales, periódicos*.

También son racionales, aunque el hecho no será demostrado aquí. Por ejemplo, $0.\overline{3}$ es igual a $\frac{1}{3}$.

- Este puede tener dígitos no nulos a la derecha del punto decimal que continúan por siempre sin repetirse.

Tales números se llaman *decimales no terminales, aperiódicos*. Cuando esto resulta, *cualquiera* de tales números es irracional.

El número $\sqrt{20}$ es un decimal no terminal, no periódico, entonces es irracional.

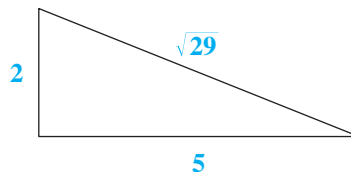


Recuerda

En un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras: calcula la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de las longitudes de los catetos. Para este triángulo, el cálculo es $\sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Ya has visto muchos números irracionales. De hecho, cualquier número que tiene un radical en su forma reducida es irracional.

Has trabajado con esta clase de números irracionales cuando representas las distancias y longitudes. Por ejemplo, la longitud de la hipotenusa de este triángulo es irracional.



Aunque no todos los números irracionales son raíces. Un número irracional famoso es el número π .

Serie de problemas J

Trabaja con un compañero para decidir si cada número a continuación es racional o irracional. Si un número es racional, escríbelo como una razón de dos enteros. Si es irracional, explica cómo lo sabes.

- | | |
|------------------------------|------------------------------------|
| 1. $3\frac{1}{2}$ | 2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{45}$ |
| 3. 4.627803 | 4. $\sqrt[3]{32} \div \sqrt[3]{4}$ |
| 5. $\sqrt{40} - \sqrt{10}$ | 6. $\sqrt{22}$ |
| 7. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ | 8. 0 |
| 9. $1.\bar{6}$ | 10. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

Comparte & resume

Menciona si los miembros de cada grupo son *siempre racionales*, *a veces racionales* o *nunca racionales*. Explica tu razonamiento o da ejemplos.

1. enteros
2. raíces cúbicas
3. expresiones radicales
4. productos o dos números irracionales

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

En los Ejercicios 1 al 10, calcula las raíces indicadas sin usar la calculadora.

- | | |
|---|--------------------------|
| 1. las raíces cuadradas de 1.21 | 2. $\sqrt{1.21}$ |
| 3. las raíces cuadradas de $\frac{4}{49}$ | 4. $\sqrt{\frac{4}{49}}$ |
| 5. las raíces cuadradas de 0.0064 | 6. $\sqrt{0.0064}$ |
| 7. $(\sqrt{26})^2$ | 8. $(\sqrt{0.09})^2$ |
| 9. $\sqrt{(-3)^2}$ | 10. $\sqrt{x^2}$ |

Resuelve cada ecuación. Si no tiene solución, escribe “sin solución”.

- | | | |
|----------------------|--------------------------|------------------------------|
| 11. $\sqrt{x-3} = 9$ | 12. $5\sqrt{x} = 25$ | 13. $\sqrt{\frac{x}{7}} = 3$ |
| 14. $\sqrt{x} = 36$ | 15. $\sqrt{x+2} + 8 = 1$ | 16. $\sqrt{x-20} = -18$ |

Menciona si cada cálculo es correcto o incorrecto.

- | | |
|--|--|
| 17. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ | 18. $\sqrt{4} + \sqrt{15} = \sqrt{19}$ |
| 19. $\sqrt{3} - \sqrt{0} = \sqrt{3}$ | 20. $\sqrt{20} \div \sqrt{45} = \frac{2}{3}$ |

Reduce cada expresión radical. Si ya está reducida, menciónalo.

- | | |
|---|--|
| 21. $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{20}}$ | 22. $\sqrt{17} - \sqrt{30}$ |
| 23. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{12}$ | 24. Reto $\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+8}$ |
| 25. A continuación hay cuatro expresiones radicales. Supón que x es positiva. | |
| i. $\sqrt{800x^3}$ | ii. $4x\sqrt{50x}$ |
| iii. $3\sqrt{32x^3}$ | iv. $5\sqrt{8x^3} + 2x\sqrt{2x} + 2\sqrt{32x^3}$ |
| a. Reduce cada expresión. | |
| b. ¿Qué expresiones son equivalentes a las otras? | |

Decide si las expresiones en cada par son equivalentes. Explica.

- | | |
|--|---|
| 26. $3\sqrt{5}$ y $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$ | 27. $\sqrt{32} - \sqrt{18}$ y $\sqrt{14}$ |
|--|---|

En los Ejercicios 28 al 35, calcula las raíces indicadas sin usar la calculadora.

- | | |
|--|------------------------------------|
| 28. la raíz cúbica de -216 | 29. $\sqrt[3]{-216}$ |
| 30. las sextas raíces de 64 | 31. $\sqrt[6]{64}$ |
| 32. la quinta raíz de -243 | 33. $\sqrt[5]{-243}$ |
| 34. Reto las octavas raíces de x^{16} | 35. Reto $\sqrt[8]{x^{16}}$ |



Ordena cada conjunto de números de menor a mayor.

36. $\sqrt[9]{-41}$ $\sqrt[3]{-41}$ $\sqrt[11]{-41}$ $\sqrt[5]{-41}$ $\sqrt[7]{-41}$

37. $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ $\sqrt[311]{-\frac{1}{3}}$ $\sqrt[5]{-\frac{1}{3}}$ $\sqrt[105]{-\frac{1}{3}}$

Demuestra que cada número es racional al encontrar un par de enteros cuyas razones o cocientes sean iguales al número.

38. 3.56

39. -0.000230

40. $-1.\overline{6}$

41. $5\frac{3}{8}$

Menciona si cada número es racional o irracional. Si es racional, calcula dos enteros cuyas razones sean iguales a este. Si es irracional, explica cómo lo sabes.

42. $-3.\overline{3}$

43. $4\frac{1}{3}$

44. $-\sqrt{28}$

45. -5.8237

46. $\sqrt[4]{32}$

47. $\sqrt{45} - \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$

48. Para este problema, supón que x es positiva.

- a.** Enumera tres valores de x para los cuales $\sqrt{x}$ es menor que x .
- b.** Enumera tres valores de x para los cuales $\sqrt{x}$ es mayor que x .
- c.** En general, ¿cómo puedes determinar si $\sqrt{x}$ es mayor que x ?

49. ¡Pruébalo! Evan dijo, —Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$.

- a.** Intenta varios valores de x y y para investigar la conjetura de Evan.
- b.** ¿Es verdadera la conjetura de Evan? Si lo es, explica por qué. Si no lo es, da un contraejemplo.

50. ¿Para qué valores de x y y $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$ es verdadera?

51. ¿Para qué valores de x y y $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{x-y}$ es verdadera?

52. ¡Pruébalo! En la Investigación 2, viste que para valores no negativos de x y y , $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$. En las Partes a, b, c y d, demostrarás esta conjetura.

Para facilitar las cosas, define dos nuevas variables: $u = \sqrt{x}$ y $v = \sqrt{y}$.

- a.** ¿Cuál es el producto uv en términos de x y y ?
- b.** En términos de x y y , ¿a qué son equivalentes u^2 y v^2 ?
- c.** Completa el espacio con x y y :

$$(uv)^2 = u^2 v^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

- d.** Usa tus respuestas para la Parte c para escribir una expresión en términos de x y y que es equivalente a uv .

En tus propias palabras

Escribe una carta para un estudiante más joven que explique la diferencia entre los números racionales e irracionales. Incluye las definiciones de ambas clases de números y varios ejemplos de cada uno.

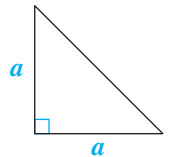
- e. En las Partes a y d se te pidió que escribieras el producto de uv en términos de x y y de manera que tus respuestas a estas partes fueran equivalentes. ¿Has demostrado que $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{(x \cdot y)}$?

- f. **Reto** Usa las Partes a, b, c y d como una guía para probar que

$$\sqrt{x} \div \sqrt{y} = \sqrt{x \div y}$$

si x es no negativa y y es positiva. Si te ayuda, vuelve a plantear ambos lados como fracciones: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

53. **Geometría** Los triángulos rectángulos isósceles tienen dos catetos que tienen la misma longitud. Si la longitud del lado de un triángulo rectángulo isósceles es a , ¿cuál es la longitud de la hipotenusa? Reduce tu respuesta.



54. Enumera estos números del menor al mayor.

$$0 \quad 1 \quad -1 \quad \sqrt[5]{2} \quad \sqrt[5]{-2} \quad \sqrt[5]{0.2} \quad \sqrt[5]{-0.2}$$

55. Considera $\sqrt[n]{n}$.

- a. Si n es mayor que 1, ¿es $\sqrt[n]{n}$ mayor que o menor que n ?
b. Si n es mayor que 0 pero menor que 1, ¿es $\sqrt[n]{n}$ mayor o menor que n ?

56. **Reto** Considera $\sqrt[n]{x}$.

- a. Si $\sqrt[n]{x}$ es positiva, ¿qué puedes asegurar sobre x ? Explica.
b. Si $\sqrt[n]{x}$ es negativa ¿qué puedes asegurar sobre n y x ? Explica.

57. Trabajaste mucho con exponentes enteros. Los exponentes también pueden ser fracciones. Cuando $\frac{1}{n}$ se usa como exponente, significa “toma la n ésima raíz”. Entonces, por ejemplo,

$$81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9 \quad (-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3 \quad 64^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{64} = 4$$

Las leyes de los exponentes se aplican a exponentes fraccionarios justo como se aplican a los exponentes enteros.

Evalúa cada expresión sin usar la calculadora. En las Partes e, f, g y h, usa las leyes de los exponentes para ayudarte.

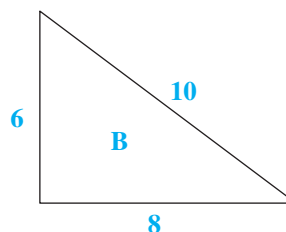
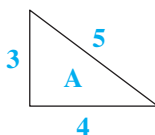
- a. $1.44^{\frac{1}{2}}$ b. $125^{\frac{1}{3}}$ c. $(-32)^{\frac{1}{5}}$ d. $-32^{\frac{1}{5}}$
e. $(3^{\frac{1}{3}})^3$ f. $(\frac{9}{25})^{\frac{1}{2}}$ g. $(64)^{-\frac{1}{3}}$ h. $16^{\frac{3}{4}}$



Recuerda

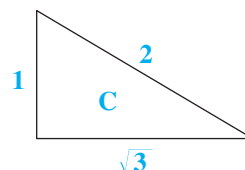
Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma.

- 58. Geometría** Si dos triángulos son semejantes, puedes multiplicar las longitudes de los lados de un triángulo por un número para obtener las longitudes de los lados del otro triángulo. Por ejemplo, en los siguientes triángulos semejantes A y B, puedes obtener las longitudes de los lados del Triángulo B al multiplicar las longitudes de los lados del Triángulo A por 2. Este número se llama el *factor de escala*.



- a.** Imagina que todos los triángulos son semejantes al Triángulo C.

Si escalas el Triángulo C por un factor n , ¿cuáles serán las longitudes de los lados del nuevo triángulo?



- b.** ¿Es posible encontrar un triángulo semejante al Triángulo C cuyos lados son números irracionales? Si lo es, da un ejemplo mencionando el factor de escala y las nuevas longitudes de los lados. Si no lo es, explica por qué no.
- c.** ¿Es el área del Triángulo C racional o irracional? Explica.
- d. Reto** ¿Es posible encontrar un triángulo semejante al Triángulo C cuya área sea racional? Si lo es, da un ejemplo mencionando el factor de escala y las nuevas longitudes de los lados. Si no lo es, explica por qué no.

- 59. Reto** En las Partes a y b, menciona si el número es racional o irracional. Si es racional, encuentra dos enteros cuya razón sea igual a este. Si es irracional, explica cómo lo sabes.

- a.** $6\sqrt{3}$
- b.** 2π (Ayuda: Si es racional, es igual a $\frac{a}{b}$ para algunos enteros a y b . ¿A qué podría ser igual π en términos de a y b ?)
- c.** En general, si multiplicas un número racional no nulo n por un número irracional m , ¿será racional o irracional el resultado? Explica cómo lo sabes.

Repaso mixto

60. Identifica los pares de fracciones equivalentes en esta lista.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{8}{10} \quad \frac{28}{48} \quad \frac{20}{25} \quad \frac{6}{27} \quad \frac{12}{36}$$

Escribe cada fracción en los términos más pequeños.

61. $\frac{48}{80}$ **62.** $\frac{140}{196}$ **63.** $\frac{198}{231}$ **64.** $\frac{140}{315}$

65. Sin graficar, decide cuáles de estas ecuaciones representan rectas paralelas. (Supón que q está en el eje horizontal.) Explica.

a. $2p = 3q + 5$ **b.** $p = 3q^2 + 5$
c. $p = 1.5q - 7.1$ **d.** $p = 3q + 3$

Determina si los tres puntos de cada conjunto son colineales.

66. $(1, -1.6), (5, 0), (6, 0.4)$ **67.** $(7, -4), (3, -1), (-2, 2.75)$

Escribe una ecuación cuadrática para cada tabla.

68.

x	y
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9

69.

x	y
-3	59
-2	54
-1	51
0	50
1	51
2	54
3	59

70.

x	y
-3	18
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8
3	18

71. Jonas y Julia hicieron un experimento en el que dejaron caer una pelota de goma desde varias alturas y midieron la altura a la que rebotaba la pelota. Aquí están los datos que recopilaron.

Altura de la caída (pulg)	6	7	10	14	16	18	20	24	26	30
Altura del rebote (pulg)	2	2.5	4	5	6	6.5	7	8.5	10	12

- Haz una gráfica de los datos con la altura de la caída en el eje horizontal.
- Dibuja una recta que pase por la mayoría de los puntos, y usa tu gráfica para escribir una ecuación de la recta.
- Ahora calcula la media de las alturas de caída y la media de las alturas de rebote de los datos en la tabla.
- Grafica el punto que tiene a estas dos medias como sus coordenadas y ajusta la recta que dibujaste en la Parte b para que pase por este punto. Escribe una ecuación para tu nueva recta.

VOCABULARIO

enésima raíz
factor de
crecimiento
factor de
desintegración
notación científica
números
irracionales
números
racionales
números reales
radical
raíz cuadrada

Resumen del capítulo

En este capítulo, comenzaste a revisar los exponentes enteros y las leyes de exponentes. También estudiaste las relaciones exponenciales, de crecimiento y de desintegración.

Después trabajaste con las raíces cuadradas de números. Generalizaste el concepto de raíces cuadradas para las raíces cúbicas, cuartas raíces, e incluso raíces más altas. También aprendiste la diferencia entre los números racionales e irracionales.

Estrategias y aplicaciones

Las preguntas en esta sección te ayudarán a revisar y aplicar ideas importantes y estrategias desarrolladas en este capítulo.

Entiende exponentes enteros

- Supón que y es un entero positivo.
 - Explica lo que significa x^y .
 - Explica cómo se relacionan x^y y x^{-y} .
- Supón que r es un número no igual ni a 0 ni a 1. ¿Cómo decidirías cuál es mayor, r^{11} ó r^{21} , en cada uno de los siguientes casos? Explica tus respuestas.
 - r es mayor que 1.
 - r está entre 0 y 1.
 - r está entre -1 y 0.
 - r es menor que -1 .

Entiende la notación científica

- ¿Cuál es mayor, 2.3×10^{32} ó 3.2×10^{23} ? Explica.
- El átomo de un elemento se compone de protones, neutrones y electrones. La masa en reposo de un protón es 1.7×10^{-24} gramos. La masa en reposo de un electrón es 9.1×10^{-28} gramos. Contesta estas preguntas sin usar tu calculadora.
 - ¿Cuántos gramos más de masa tiene un protón que un electrón?
 - ¿Cuántas veces más masa tiene un protón que un electrón?



Reconoce y describe relaciones exponenciales

5. Determina cuál de estas ecuaciones describe una relación exponencial. Para cada relación exponencial, indica si es de crecimiento o de desintegración.

$$y = 3(x^4)$$

$$y = 3(4^x)$$

$$y = 3x + 4$$

$$y = \frac{1}{4x}$$

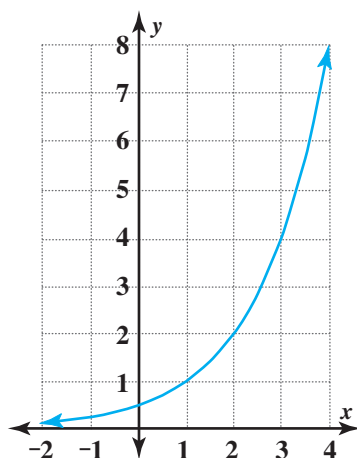
$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$y = x^4$$

Para las Preguntas 6 a la 8, contesta las Partes a, b y c.

- Identifica si la relación descrita es exponencial.
 - Explica tu razonamiento.
 - Si la relación es exponencial, escribe una ecuación que la describa.
6. Un torneo de damas con 2,048 concursantes se ha organizado en varias rondas. En cada ronda, cada concursante juega con un oponente. Sólo los ganadores continúan a la siguiente ronda. Considera la relación entre el número de ronda (Ronda 1, Ronda 2, y así sucesivamente) y el número de concursantes que juega en esta ronda.

7.





La palabra *módem* es una versión corta de *modulador-demodulador*.

8. Los *módems* son dispositivos que permiten que las computadoras “hablen” con otras computadoras a través de una línea de teléfono. Al pasar de los años, las mejoras técnicas han permitido que los módems se comuniquen a velocidades cada vez más rápidas.

Cada vez que las velocidades de los módem aumentaron, Elisa compró uno nuevo. Su primer módem tenía una velocidad de sólo 1,200 kilobytes por segundo (kps). La tabla muestra la velocidad de cada uno de sus módems. Considera la relación entre el número de módem y su velocidad.

Número de módem	Velocidad (kps)
1	1,200
2	2,400
3	4,800
4	9,600
5	14,400
6	28,800
7	33,600
8	57,600

Entiende las leyes de exponentes

9. **¡Pruébalo!** Al completar las Partes a y b, demuestra que la potencia de una ley de potencias funciona cuando el exponente es un entero positivo y el otro es un entero negativo. Supón que a es un número positivo y b y c son enteros positivos.
- Demuestra que $(a^b)^{-c} = a^{-bc}$.
 - Ahora demuestra que $(a^{-b})^c = a^{-bc}$.

Entiende las raíces

10. Explica por qué hay dos valores de x para los cuales $x^2 = 16$, pero sólo un valor de x para el cual $x = \sqrt{16}$. ¿Cuál es el valor de x en cada caso?
11. ¿Por qué -3 es la quinta raíz de -243 ?

Identifica los números racionales e irracionales

12. Escribe cada número como una razón de dos enteros, si es posible, e identifica el número como racional o irracional.
- $0.\overline{4}$
 - 0.4
 - $\sqrt{0.4}$
 - $\sqrt{0.4} \cdot \sqrt{10}$

Demuestra tus destrezas

Evalúa o reduce cada número sin usar tu calculadora.

13. 0.4^3

15. 8^{-3}

17. $\sqrt{121}$

19. $\sqrt[3]{-1,000}$

21. $\sqrt[5]{32}$

23. $\frac{1}{3}\sqrt{27}$

14. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

16. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

18. $\sqrt{32}$

20. $\sqrt[3]{0.027}$

22. $2\sqrt[7]{(-3)^{14}}$

24. $\sqrt[x]{13^x}$

Escribe cada expresión con un solo exponente y una sola base. Supón que x no es cero.

25. $a^3 \cdot b^3$

26. $(2x)^4 \cdot (2x)^{-7}$

Reduce cada expresión lo más que puedas. Cuando sea necesario, supón que la variable no es negativa.

27. $\sqrt{52}$

29. $\sqrt{18x^3}$

28. $-\sqrt{70}$

30. $3m\sqrt{4m^6}$